失敗学的検算のすすめ

松浦將國 *

2018 年 11 月 12 日更新

概要

あまりに計算ミスをする方が多いので，自戒と備忘録も兼ねて失敗した答案を直すための検算方法を色々と集めてみました．ご自由にお使い下さい．

0 序

他人のことを偉そうに言える立場ではないが，試験の採点をしているとまったく検算をしていないために誤答したと思われる答案が目立つ．従来は答案に赤でコメントを書いたり授業のときにいちいち注意してきたりしたが，全然追いついていないのが実態である．また，似たような事例は他の高校，高専，大学，予備校などにも存在し，「解けたはずなのに点数がついていない」という可哀想な学生が多数いるだろうとも想像される．

私の学生時代も，数学教師は模範解答やこぎれいな公式群を紹介して学生にそれを写させて，できない学生をつるし上げたり補習に強制参加させたりしていた．田舎の “進学校” にありがちな数学教育である．今もその指導方法は一部には続いているようであり方法自体はそれほど悪くはない．しかし，自分の誤った解答をいかにして修正するかという視点がほとんどないのは問題である．失敗学という言葉が巷間流行していると聞き，数学の問題演習でも失敗した答案を修正する技術指導があっても良いのではないかと大学院生の頃から思うようになった．以後，私の授業などでこの失敗学的検算を指導しているところであるが，その方法をより多くの人々に知ってもらうべく公表することにした．

高校・高専レベルの数学の問題を中心に多くの誤答例を紹介した上で，どうすれば自力で誤りと気づくことができて，かつどのように修正すれば良いのかという方針で編集した．数学の定理や公式，秀逸な解法に関してはすでに良いテキストが紙媒体でもインターネットでも十分流通しているのでそちらに譲る．この文書は高校 3 年生相当の知識を前提としているが，そうでない場合でも少しは理解できるように各節ごとに独立した構成を心

* メールアドレス：matsuura(at)kagoshima-ct.ac.jp

掛けた．細部が多少分からなくとも読み飛ばしてもらえれば良いかと思う．

以下，誤答例紹介部分にて**誤答部分は ★** で**手詰まりになったところは** $\sharp$ で表す．記号などはなるべく高校の教科書類に合わせたが，TEX の慣用上必ずしも一致しない部分もある．また，過去問題を用いた場合は可能な限り出題年と学校名が分かるようにした．誤植や言い間違い，誤答部分以外の誤りなどもあろうかと思う．注意したつもりではあるが，もしそのような誤りを見つけられたら遠慮なく前記メールアドレスまで連絡を頂ければ幸いである．

1　複雑な数の計算は近似で確認

無理数や虚数をはじめとした数の複雑な計算は近似で楽に確認できることがある．まずは簡単な例題で見てみよう．

1.1　基礎

例題 1.1. 次の値を簡単にせよ．ただし，i は虚数単位とする．

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}+2} \qquad (2)\quad (1+\sqrt{2}i)^2$$

たとえば，例題 1.1 を次のように誤答したとしよう．

(1)

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \quad (\bigstar) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 1+2\sqrt{2}i+\sqrt{2}i^2 \quad (\bigstar) \\ &= 1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

普段は解答例を見ながら演習することはできるが，試験の場合には見られないことが多い．自力で前述のような誤りを修正しなければならない．ここでは，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の近似を用いて誤答を修正してみよう．

まず，(1)(2) の解答をそれぞれ行ごとに分けてみる．

$$\begin{aligned} \underline{\text{与式}}_{①} &= \underline{\frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}_{②} \quad (\bigstar) \\ &= \underline{0.}_{③} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \underline{\text{与式}}_{④} &= \underline{1+2\sqrt{2}i+\sqrt{2}i^2}_{⑤} \quad (\bigstar) \\ &= \underline{1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i.}_{⑥} \end{aligned}$$

$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.24$ だったから，① ~ ③ の近似値は次のようになる．

$$①\fallingdotseq \frac{1}{2.24-2}+\frac{1}{2.24+2}=\frac{1}{0.24}+\frac{1}{4.24}\fallingdotseq 4.17+0.24=4.41.$$

$$②\fallingdotseq \frac{2.23+2-2.23-2}{(2.23+2)\cdot(2.23-2)}=\frac{0}{(2.23+2)\cdot(2.23-2)}=0.$$

$$③=0.$$

となり，①と②の間に誤りが含まれていたことが分かる．ていねいに①を計算すると，

$$\begin{aligned} ① &= \frac{(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2} \\ &= \frac{2+2}{5-4} \\ &= 4. \end{aligned}$$

が正解であることも分かる．同様に， $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ なので

$$④\fallingdotseq (1+1.41i)^2=1+2.82i-1.41^2=1-1.9881+2.82i=-0.9881+2.82i.$$

一方，

$$⑤\fallingdotseq 1+2.82i-1.41=-0.41+2.82i,\quad ⑥\fallingdotseq 1-1.41+2.82i=-0.41+2.82i.$$

よって，④ と ⑤ の間に誤りが認められる．④ の正解は次の通り：

$$\begin{aligned} ④ &= 1+2\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2 \\ &= 1+2\sqrt{2}i+2i^2 \\ &= 1+2\sqrt{2}i-2 \\ &= -1+2\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

このように手軽な方法だが，近似が粗いとうまく検算できないこともある．近似の精度を挙げれば（たとえば， $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4142$ とする）良いという意見もあろうが，潔癖な人からすると前述のようなレベルでは不満かもしれないし，近似では通用しない問題もありうる．次の例題で見てみよう．

1.2　応用

例題 1.2.

$$\frac{1}{100\sqrt{3}-173}$$

の近似値を小数第一位（小数第二位は四捨五入）まで求めよ．必要ならば, $1.73<\sqrt{3}<1.74$ を用いてよい．

当然ながらこの大小関係をそのまま強引に使うと

$$1 < \frac{1}{100\sqrt{3}-173} < \frac{1}{0}$$[*1]

とおかしなことになる．「$\sqrt{3}$ の近似の精度を上げれば良い」という意見もあろう．しかし，$1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321$ としても $1/0.21 < 1/(100\sqrt{3}-173) < 1/0.20$ より $4.76 < 1/(100\sqrt{3}-173) < 5$ までしか言えず，求めるレベルの近似は得られない．それよりは分母を有理化する方が合理的なのだが，次のような誤答がありうる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{100\sqrt{3}-173} &= \frac{100\sqrt{3}+173}{(100\sqrt{3}-173)(100\sqrt{3}+173)} \\ &= \frac{100\sqrt{3}+173}{30000-29929} \\ &= \frac{100\sqrt{3}+173}{81} \quad (\bigstar)\end{aligned}$$

と分母を有理化する．$346 < 100\sqrt{3}+173 < 347$ なので

$$4.27 < \frac{346}{81} < \frac{100\sqrt{3}+173}{81} < \frac{347}{81} < 4.29.$$

よって，答は 4.3 である．

電卓を用いれば**正解が 4.9 である**ことは分かるが，多くの場合は試験で電卓は持ち込めない．しかし，$\sqrt{3}^2 = 3$ であることを利用すれば上記の答が誤りであることが分かる．実際，誤答によれば

$$\frac{346}{81} < \left(\frac{100\sqrt{3}+173}{81} =\right)\frac{1}{100\sqrt{3}-173} < \frac{347}{81}$$

だが，逆数をとって整理すると

$$\frac{\frac{81}{347}+173}{100} < \sqrt{3} < \frac{\frac{81}{346}+173}{100} \quad \cdots ⑦.$$

⑦ の左辺は 1.7323 より大きくかつ ⑦ の右辺は 1.7324 より小さい[*2]ので

$$3 < 1.7323^2 (= 3.00086329) < (\sqrt{3})^2 = 3 < 1.7324^2.$$

したがって，上記の誤答は誤りであることが分かる．★ 以後の部分は次のように修正される：

$$\frac{1}{100\sqrt{3}-173} = \frac{100\sqrt{3}+173}{71}$$

*1 もちろん 1/0 という数は存在しない．

*2 この時点で $\sqrt{3} < 1.7321$ に矛盾するという意見もあろうがここでは置く．

であるから,

$$4.873 < \frac{346}{71} < \frac{100\sqrt{3}+173}{71} < \frac{347}{71} < 4.888$$

より答は 4.9.

正解であっても油断せずに件の確認をまねれば自信がつくであろう.

$$\frac{346}{71} < \frac{1}{100\sqrt{3}-173} < \frac{347}{71}$$

なので,

$$(1.7320 <)\frac{\frac{71}{347}+173}{100} < \sqrt{3} < \frac{\frac{71}{346}+173}{100}(< 1.7321).$$

$\sqrt{3}$ の近似値を知っていればここで締めても良いし,二乗して

$$1.7320^2(= 2.999824) < (\sqrt{3})^2 = 3 < 1.7321^2(= 3.00017041)$$

と駄目を押してもよい.

問題 1.1. $3.60 < \sqrt{13} < 3.61$ であることを利用して,$1/(5\sqrt{13}-18)$ の整数部分を求めよ.

問題 1.2. $\sqrt{41}$ の近似値を小数第四位まで(小数第五位は四捨五入)求めよ.

2 恒等式は文字に数値を代入して行ごとに確認せよ

たとえば,$x-(x+1)=-1$ がすべての数 x に対して成り立つように,**恒等式では文字に何の値を代入しても等号が成立**する.このことを用いれば,確実さは劣るが簡単に計算ミスのチェックができる.

2.1 基礎

例題 2.1. (1) $(a+2b)(a^2-3ab+4b^2)$ を展開せよ.
(2) x^3+2x^2-2x-1 を因数分解せよ.

これらをそれぞれ次のように誤答したとする.

(1)

$$\begin{aligned}\underline{与式}_{①} &= \underline{a^3-3a^2b+4ab^2+2a^2b-5ab^2+8b^3}_{②} \quad (\bigstar)\\ &= \underline{a^3-a^2b-ab^2+8b^3}_{③}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\underline{与式}_{④} &= \underline{x^3-1-2x(x-1)}_{⑤} \quad (\bigstar)\\ &= \underline{(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)}_{⑥}\\ &= \underline{(x-1)(x^2-x+1)}_{⑦}\end{aligned}$$

試しに (1) の ① 〜 ③ で $a=1, b=2$ とすると，

$$\begin{aligned}① &= (1+4)\cdot(1-3\cdot 2+4\cdot 4)\\ &= 5\cdot 11\\ &= 55,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}② &= 1-3\cdot 2+4\cdot 4+2\cdot 2-5\cdot 4+8\cdot 8\\ &= 1-6+16+4-20+64\\ &= 59,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}③ &= 1-2-4+8\cdot 8\\ &= 1-2-4+64\\ &= 59\end{aligned}$$

となるので**① と ② の間で計算ミスがあった**と考えられる．さらに ② をよく見ると，第五項の $-5ab^2$ は $-6ab^2$ となるべきであることも分かる．同様に (2) で $x=3$ とすると，

$$④ = 27+18-6-1 = 38,$$

$$⑤ = 27-1-2\cdot 3\cdot 2 = 27-1-12 = 14,$$

$$⑥ = 2\cdot(9+3+1)-2\cdot 3\cdot 2 = 2\cdot 13-12 = 14,$$

$$⑦ = 2\cdot(9-3+1) = 14$$

となるので **④ と ⑤ の間で計算ミスがあった**と考えられる．⑤ をよく見ると第三項は $-2x(x-1)$ ではなく $+2x(x-1)$ となる．

もちろんこの方法は完全でない[*3]ので何か気持ち悪いという人もいるだろう．そういう完璧主義者は**展開と因数分解は逆の操作であることを利用**して，次のように検算すれば良い．ただし，前の方法と比べて手間がかかる上にどこで計算を誤ったか見通しづらくなる．

(1) の答を a の式とみなすと $a+2b$ で割りきれてかつ商が $a^2-3ab+4b^2$ でなければならない．しかし，③ を $a+2b$ で割ると商が $a^2-3ab+5b^2$ で余りが $-2b^3$ となり矛盾する．一方，(2) の答 ⑦ を展開すると ④ に戻るはずだが

$$\begin{aligned}⑦ &= x(x^2-x+1)-(x^2-x+1)\\ &= x^3-x^2+x-x^2+x-1\\ &= x^3-2x^2+2x-1\end{aligned}$$

となり ④ と一致しない．

念のため正解も述べておく．

[*3] 実際，(2) で $x=1$ とすると，④ 〜 ⑦ はすべて 0 となりうまくチェックできない．代入する際に見当をつけたりいくつかの値を代入するなどの工夫が必要である．

(1)

$$\begin{aligned}\text{与式} &= a^3-3a^2b+4ab^2+2a^2b-6ab^2+8b^3\\ &= a^3-a^2b-2ab^2+8b^3\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{与式} &= x^3-1+2x^2-2x\\ &= (x-1)(x^2+x+1)+2x(x-1)\\ &= (x-1)\{(x^2+x+1)+2x\}\\ &= (x-1)(x^2+3x+1)\end{aligned}$$

(1) で $a=1$ かつ $b=2$ とすると各行の値は 55 になり，かつ (2) で $x=3$ とすると各行の値は 38 になるはずである．

問題 2.1. このことを確認せよ．

この小節で紹介した技は次のような例題にも応用される．

2.2　応用

例題 2.2. $(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)+24$ を因数分解せよ．

（2006 年，東洋大）

$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$ かつ $(x-4)(x+3)=x^2-x-12$ となることから x^2-x **を一つの文字でおくことがポイント**である．誤答例から挙げよう．

$$\begin{aligned}\underline{\text{与式}}_{⑧} &= \underline{(x^2-x-12)(x^2-x-2)+24}_{⑨}\\ &= \underline{(X-12)(X-2)+24}_{⑩} \quad (x^2-x=X\text{ とした})\\ &= \underline{X^2-14X+48}_{⑪}\\ &= \underline{(X+2)(X-16)}_{⑫} \quad (★)\\ &= \underline{(x^2-x+2)(x^2-x-16)}_{⑬}\end{aligned}$$

$x=-1$ のとき $X=2$ なので，⑧ = ⑨ = ⑩ = ⑪ = 24 かつ ⑫ = ⑬ = −56 となり**少なくとも ⑪ と ⑫ の間に誤りがある**ことが分かる．⑪ 以降は

$$⑪=(X-6)(X-8)=(x^2-x-6)(x^2-x-8)=(x+2)(x-3)(x^2-x-8)$$

と修正される．この答で不安ならば次のように確認したらよい：⑧ は x^2-x-8 で割りきれてその商は $(x+2)(x-3)$ と因数分解されなければならない．実際，⑧ を展開すると $x^4-2x^3-13x^2+14x+48$ となるが，これを x^2-x-8 で割ると商が $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ で余りが 0 となる．例題 2.2 の答が ⑬ でないことは次の問題を解くことでも確認される．

問題 2.2. $x^4-2x^3-13x^2+14x+48$ を x^2-x+2 で割った商と余りを求めて **余りが 0 にならない** ことを確かめよ．

以下に追加の問題を挙げておくので**解いた後には必ず検算を**してほしい.

問題 2.3. a^4+2a^2+9 を因数分解せよ.

問題 2.4. ある多項式を x^2+4 で割ると商が x^2-x-1, 余りが $x+1$ となった. この多項式を x^2+4x-2 で割ったときの商と余りを求めよ.

3　方程式・不等式は解（の一つ）を代入して検算せよ

3.1　基礎

例題 3.1. (1) 方程式 $8x^2-14x+3=0$ を解け.
(2) 不等式 $8x^2-14x+3>0$ を解け.

（2007 年，センター本試，改題）

この例題では「(1) の誤答例→ (1) の修正→ (2) の誤答例→ (2) の修正」の順で述べる. まず，(1) を次のように誤答したとしよう.

(1) 二次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \underline{\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{8}}_{\text{①}} \\ &= \underline{\frac{7\pm(7-\sqrt{24})}{8}}_{\text{②}} \qquad (\bigstar) \\ &= \frac{7-\sqrt{6}}{4} \text{ または } \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

センター試験などの**マーク式試験では解答枠で間違いに気付くことも**ありうるが，記述式ではそういう訳にはいかない. **解を与式に代入して等号成立を確認**することが必要である. 実際，$x=\sqrt{6}/4$ を与式に代入すると,

$$\text{与式左辺} = 8\cdot\frac{6}{16}-14\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}+3 = 6-\frac{7\sqrt{6}}{2} \neq 0$$

なので，もう一つの解の $x=(7-\sqrt{6})/4$ を代入するまでもなく誤りであることが分かる. また，仮に ① と ② が等しいとすると

$$\sqrt{49-24} = 7-\sqrt{24}$$

が成立することになる. この式の両辺を二乗しても等しいから

$$49-24 = 49-28\sqrt{6}+24.$$

両辺を整理すると $\sqrt{6} = 12/7$ となる．さらにこの式の両辺を二乗して整理すると $49 = 24$ というあり得ない等式が生まれる．よって，① と ② の間で計算ミスが生じたと言える．① 以後は次のようになるべきであった．

$$① = \frac{7 \pm 5}{8} = \frac{3}{2} \text{ または } \frac{1}{4}$$

次節でも触れるが，**別解を見つける**ことでも計算ミスを減らすことができる．次の問題を解くことによって確かめてほしい．

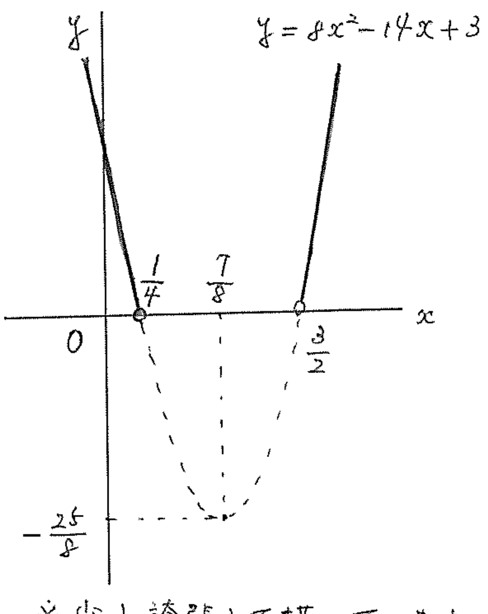
問題 3.1. 方程式 $8x^2 - 14x + 3 = 0$ を次の方法で解け．
(1) 左辺を因数分解する．
(2) 左辺を平方完成する．

さて，次に例題 3.1 (2) の誤答を紹介しよう．

$8x^2 - 14x + 3 = 0$ を解くと $x = 3/2$ または $1/4$ だから，答は

$$1/4 < x < 3/2 \quad (★) \quad (\cdots ③)$$

こちらもマーク式の試験ならば解答の形などで誤りに気づきうる．しかし，記述式の試験でこの誤りを放置すれば厳しい減点となるだろう．少し雑な検算をしてみる：③ は (2) の答だから，**③に属するすべての実数は与えられた不等式を満たすはず**である．しかし，$x = 1$ は ③ を満たすものの，$8x^2 - 14x + 3 = 8 - 14 + 3 = -3 < 0$ となり与式を満たさない．これは矛盾である．



※少し誇張して描いています．

ミス防止のために上図のように $y=8x^2-14x+3$ のグラフを描いて解が $x<1/4$ または $3/2<x$ であることを確認する方法もある．試験の時間配分が困難なこともあるだろうが，**残り時間に応じて検算や確認をする習慣を**ぜひ身に付けておいてほしい．

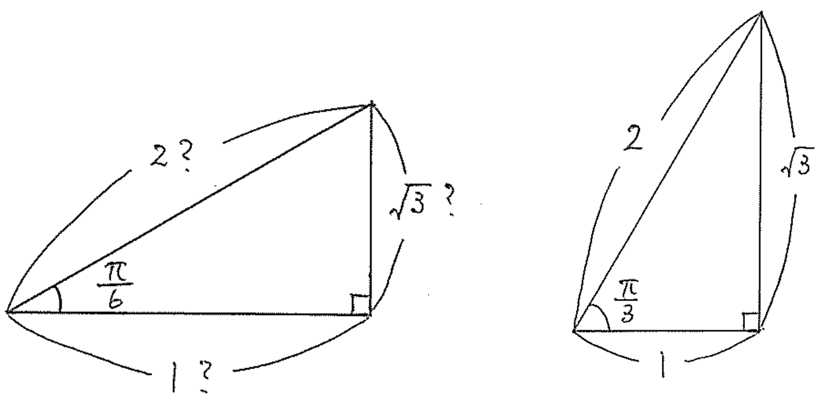
3.2　応用

解の一つでも代入して（不）等号の成立を確認する作業は「多項式 $=0$」の形の方程式以外でも重要である．以下の例題で見てみよう．

例題 3.2. (1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan x = \sqrt{3}$ を解け．
(2) $\log_3(x-1)+\log_3(x+2) \leqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ．（2009 年，甲南大）

(1) でありがちな誤答を一つあげよう．

> $\tan x = \cos x/\sin x(\bigstar) = \sqrt{3}$ かつ $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$ だから，$\cos x = \pm(1/2)$, $\sin x = \pm(\sqrt{3}/2)$（複合同順）．よって，$x=\pi/6$ または $(7/6)\pi$.



左上図のように仰角が $\pi/6=30°$ の直角三角形の辺の比を考えれば $x=\pi/6$ が解にはなりえないことは明らかである．中学校で習う「三角定規の辺の比」を知っているならば，右上図の通り $x=\pi/3$ **が解に含まれる**ことまで気づくだろう．人間の記憶力などたかが知れているのだから，**少しでも迷ったら最初の定義に返って考える習慣を**身につけてほしい．正解は読者の演習問題に残しておく．

問題 3.2. $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で次の連立方程式を解くことで例題 3.2 (1) を解け：

$$\begin{cases} \sin x/\cos x = \sqrt{3} \\ \cos^2 x+\sin^2 x = 1. \end{cases}$$

次に紹介する例題 3.2 (2) の誤答もよく見られる．

与式左辺は

$$\log_3(x-1)+\log_3(x+2)=\log_3\{(x-1)+(x+2)\}\ (\bigstar)=\log_3(2x+1)$$

と変形される．底は $3(>1)$ なので，与式 $\iff 2x+1\leqq 3^2 \iff x\leqq 4.\ (\cdots④)$

例題 3.1 (2) の "雑な" 検算をまねて $x=0$ としてみると，これは④ を満たすが与式に直接代入すると左辺第一項が $\log_3(-1)$ となる．**真数部分が負の実数**となりおかしい．分からない方のためにもう少し補足すると，では，$\log_3(-1)=s\ (\cdots⑤)$ をみたす実数 s があったと仮定しよう．**対数の定義から**⑤ は $-1=3^s\ (\cdots⑥)$ と同義である．この方程式が解をもつならば，$t=3^s$ のグラフと $t=-1$ のグラフは共有点をもたなければならない．しかし，それはありえないことが次の問題から分かる．

問題 3.3. st 平面上で $t=3^s$ と $t=-1$ のグラフを描け．

前記の誤答の原因は次の公式の誤解によるものであり，非常によく見られる：a を 1 でない正の実数，M, N を正の実数とする．

$$\begin{cases}\text{(X)} \quad \log_a M+\log_a N=\log_a(M+N)\cdots⑦\\ \text{(O)} \quad \log_a M+\log_a N=\log_a(MN)\cdots⑧\end{cases}$$

これらの（不）成立は演習問題とする．

問題 3.4. (1) 上記 ⑦ が成立しない a, M, N の例を挙げよ．
(2) 上記 ⑧ を証明せよ．

「式 ⑧ ぐらい正確に覚えられないと駄目だ！そんな奴に例題 3.2 (2) は解けない！」という厳しい意見もあろうが，はたしてそうだろうか．確かに，式⑧ を正確に覚えていれば手早く正解が得られるであろう：⑧ より与式左辺は $\log_3\{(x-1)(x+2)\}=\log_3(x^2+x-2)$ となり（真数は正なので $x>1\ (\cdots⑨)$ が成立することに注意），与式右辺は $2=\log_3 9$ なので，底 3 が 1 より大きいことから二次不等式 $x^2+x-2\leqq 9\ (\cdots⑩)$ が得られる．⑨ ⑩ から解は

$$1<x\leqq \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}.$$

しかし，私は**式 ⑧ を正確に覚えることよりその本質を理解する**ことの方が大切だと思う．問題 3.4 (2) を解けば分かるが，式 ⑧ の本質は**対数の定義と指数法則** である．では，例題 3.2 (2) を対数の定義と指数法則を利用して解いてみよう．

$\log_3(x-1)=y\ (\cdots⑪)$, $\log_3(x+2)=z\ (\cdots⑫)$ とおく．このとき対数の定義より ⑪ $\iff$ $x-1=3^y\ (\cdots⑪')$ かつ ⑫ $\iff x+2=3^z\ (\cdots⑫')$. y, z は実数だから $x-1>0$ かつ $x+2>0$ より $x>1\ (\cdots⑬)$ である．一方，与式は $y+z\leqq 2\ (\cdots⑭)$ なので $3^{y+z}\leqq 3^2(=9)$．指数法則

から $3^{y+z} = 3^y \cdot 3^z$ なので ⑪′⑫′ から

$$(x-1)(x+2) \leqq 9 \iff \frac{-1-3\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}. \cdots ⑮$$

⑬ ⑮ から解は $1 < x \leqq (-1+3\sqrt{5})/2$.

誤解を恐れずに言うが，数学では**一の原理を知ることが百の公式を暗記することより大事である．**まして大学受験などを控えた人には，複雑な有機化合物の構造式やマイナーな英単語など他に覚えなければならないものがたくさんあるのではないだろうか．数学の公式を絶対に覚えるなとは言わないが，**数学の公式は本質を理解すればほとんど暗記不要**であることを忘れないでほしい．

解を代入して検算することは漸化式や微分方程式を解いたときにも応用される．二三の例題で見てみよう．

例題 3.3. 漸化式が $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2\ (n \geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（2011 年，慶大・看護医療）

いくつかの解法が考えられるが，その前に模範的誤答を紹介しよう．

> 与漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると $a_{n+1}/3^{n+1} = a_n/3^n + 2/3^{n+1}$ なので，$b_n = a_n/3^n$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 2/3^{n+1}$. よって，
>
> $$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}. \quad (\bigstar)$$
>
> $b_1 = a_1/3 = 1/3$ なので
>
> $$b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
>
> したがって，$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$.

答の一般項に $n = 2$ を代入すると $a_2 = 11$ であるのに与漸化式からは $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$ が得られる．この時点で **少なくとも答が正しくない** ことが分かる．では，どこで誤ったのだろうか．[*4] ポイントはおもに次の四つである．

- 与漸化式：$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2\ (n \geqq 1)$ ($\cdots$Ⓐ)
- Ⓐ の両辺を 3^{n+1} で割った後：$b_{n+1} = b_n + 2/3^{n+1}$ ($\cdots$Ⓑ)
- 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めたとき：$b_n = (4/3) - (1/3)^n$ ($\cdots$Ⓒ)
- 答：$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$ ($\cdots$Ⓓ)

[*4] 上記引用部分を見れば分かるが，ここでは誤った箇所が分からないという立場で考える．

$n=2$ のときにⒶとⒹでずれが生じることは確認した．残りに関しては次の通りになるだろう：$b_1=1/3$ かつ $b_2=5/9$ なので $b_2=b_1+(2/9)$ より $n=2$ のときⒷ は成立．一方，$n=2$ のとき $b_2=(4/3)-(1/9)=11/9$ となり Ⓒ は成立しない．ここから，**ⒷとⒸの間でミスが生じたのでは**ないかと見当がつく．もう一度，Ⓑの部分から計算をやり直す．$b_1=1/3$ より $n\geqq 2$ のときは

$$b_n=b_{n-1}+\frac{2}{3^n}=\cdots=b_1+\left(\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^n.\ (\cdots\text{Ⓒ}')$$

$b_1=(2/3)-(1/3)=1/3$ よりⒸ$'$ は $n=1$ のときでも成立する．よって，答は $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ ($\cdots$Ⓓ$'$).

$n=2$ を Ⓓ$'$ に代入すると，たしかに $a_2=2\cdot 3-1=5$ となり合理性を失わない．「そんないいかげんな確認は許せない！」と思う完璧主義者の方は答の一般項をⒶ とⒷ に代入されると良いだろう．Ⓐ の漸化式の右辺に $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ を代入すると，$3a_n+2=3\cdot(2\cdot 3^{n-1}-1)+2=2\cdot 3^n-1=a_{n+1}$ よりⒶは成立する．$b_n=(2/3)-(1/3^n)$*5 をⒷ の右辺に代入すると $b_n+(2/3^{n+1})=(2/3)+(2-3)/3^{n+1}=(2/3)-1/3^{n+1}=b_{n+1}$ よりⒷも成立する．

例題 3.3 は二項間漸化式の問題の典型例である．二項間漸化式の問題は**等差数列または等比数列の漸化式に落とし込む**かまたは**最初のいくつかの項から一般項を推定して数学的帰納法により裏付ける**かで対処することが多い．例題 3.3 は等比数列の漸化式に落とし込むことでも解決される．次の方法で試されよ．

問題 3.5. (1) $x=3x+2$ の解は $x=-1$ であることを示せ．
(2) $c_n=a_n-(-1)$ とおく．数列 $\{c_n\}$ はどんな数列か.
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

問題 3.5 での解法は次の微分方程式でも応用される．

例題 3.4. 次の微分方程式を解け．

$$\frac{dy}{dx}+3y=3x^2+1\ \cdots⑯$$

まずは誤答例から．

> 与式右辺は二次式であるから，特殊解は二次多項式であると考えてよい．特殊解を $y=ax^2+bx+c$（a,b,c は実数定数で $a\neq 0$）とする．このとき，$dy/dx=2ax+b$ なので与式左辺は $3ax^2+(2a+3b)x+(b+3c)$ となる．よって，両辺の係数を比較して
>
> $$3a=1\ \text{かつ}\ 2a+3b=0\ \text{かつ}\ b+3c=1\quad(\bigstar)$$

*5 この時点で Ⓒ$'$ の確認は不要．

が成立する．これを解くと $a = 1/3,\ b = -2/9,\ c = 11/27$ だから特殊解は $y = (1/3)x^2 - (2/9)x + (11/27)$．一方，$(dy/dx) + 3y = 0$ の一般解は $y = Ce^{-3x}$（C は任意定数）なので，求める解は

$$y = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}. \quad \cdots ⑰$$

解答者が正解したつもりなのに点数がついてこない最悪のパターンである．実際，上記の誤答では特殊解を正確に求めていない．例題 3.4 のポイントが特殊解を求めることにあることを考えると厳しい結果になるだろう．

⑰ は ⑯ の解なので，**⑰を⑯の左辺に代入すると $3x^2 + 1$ になるはず**である．しかし，⑰ を⑯ に代入すると，

$$\frac{dy}{dx} + 3y = -3Ce^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + 3Ce^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} = x^2 + 1$$

となる．ここから，上記の $3a = 1$ は $3a = 3$ となるべきであったことも分かる．続きをやり直すと，$3a = 3,\ 2a + 3b = 0,\ b + 3c = 1$ を解くと $a = 1,\ b = -2/3,\ c = 5/9$ より特殊解は $y = x^2 - (2/3)x + (5/9)$ である．この特殊解は

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\right) + 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\right) = 3x^2 + 1 \quad \cdots ⑱$$

を満たす．⑯ − ⑱ より

$$\frac{d}{dx}\left\{y - \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\right)\right\} + 3\left\{y - \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\right)\right\} = 0.$$

$z = y - \{x^2 - (2/3)x + (5/9)\}$ とおくと，$(dz/dx) + 3z = 0$. これを解くと，$z = Ce^{-3x}$（C は任意定数）．よって，求める解は

$$y = Ce^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}. \quad \cdots ⑲$$

問題 3.5 ですべての n に対して $a_n = -1$ だとすると，漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ($\cdots$⑳) 自体は満たされる．いわば，$a_n = -1$ は ⑳ の特殊解ともとれる．そう考えると問題 3.5 での数列 $\{c_n\}$ は例題 3.4 での z に対応している．このように問題 3.5 の解法と例題 3.4 の上記解法はよく似ている．見た目が異なる問題であっても共通点や類似点を見つけることも大切である．

解答者の立場により色々な解答戦略があるだろうが，**解けない問題とにらみ合う前に解けた問題の検算を済ませておくことも一手**である．次の検算は演習問題に残しておく．

問題 3.6. ⑲ を ⑯ の左辺に代入したら $3x^2 + 1$ となるか確かめよ．

また，例題 3.4 が定数変化法により解かれることにも注意されたい．こちらは誘導付き演習問題として残しておく．

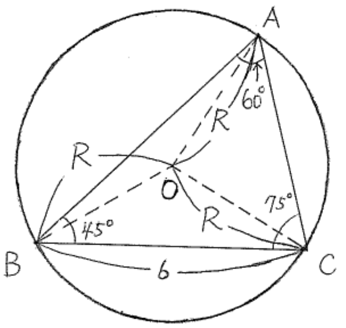
問題 3.7. (1) $(dy/dx)+3y=0$ の一般解 $y=Ce^{-3x}$（C は任意定数）に対して，$y=C(x)e^{-3x}$ とおく．これを ⑯ に代入して，$C'(x)=e^{3x}(3x^2+1)$ であることを示せ．
(2) $\int e^{3x}(3x^2+1)dx$ を部分積分により計算して⑯ の一般解を求めよ．

4　別解を考えよ

別解を考えることは検算として効果を持つ．また，別解を考える習慣が身についていれば，公式や定理を多少忘れたり勘違いしてしまっても何とかなることがある．次の例題で検証してみよう．

4.1　基礎

例題 4.1. $BC=6$, $\angle B=45°$, $\angle C=75°$ である三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．



正弦定理を勘違いした誤答を紹介する．

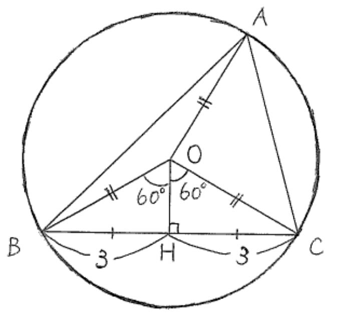
> 三角形の内角の和は 180° なので $\angle A=60°$ である．よって，求める半径を R とすると正弦定理から
> $$2R=\frac{\sin 60°}{6} \quad (\bigstar) \Longleftrightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{24}.$$

別解を考える前にこの答案が誤りであることを簡単な方法で指摘しておく．外接円の中心を O とすると，$OB=OC=R$ である．よって，三角形 OBC に関する三角形の成立条件 $OB+OC>BC$ から $R+R>6$ つまり $R>3$ でなければならない．しかし，

$$R=\frac{\sqrt{3}}{24}<\frac{2}{24}=\frac{1}{12}<3<R$$

となり矛盾が生じる．

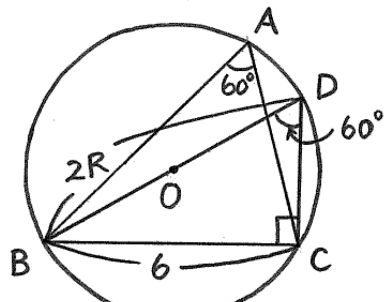
そこで「正弦定理を正確に覚えないから間違えるんだ！正弦定理の公式を紙に千回書くんだ！」などと精神論に走っても意味はない．[*6] 大切なことは**問題で与えられた条件を図に**表したり**必要な補助線を引いて**みたりすることである．



〈別解 1〉上図の通り三角形 ABC の外接円の中心を O とする．円の中心角は円周角の二倍なので $\angle BOC = 120°$．ここで，三角形 OBC は $OB = OC$ の二等辺三角形なので，点 O から線分 BC に垂線 OH を下ろすと $BH = HC = 3$．また，$\angle BOH = \angle COH = 60°$ なので，

$$\sin 60° = \frac{3}{OB} \Longleftrightarrow OB = 2\sqrt{3}.$$

また，**正弦定理は円周角の定理の応用**であることを理解していれば前記の誤答も次のように修正される：



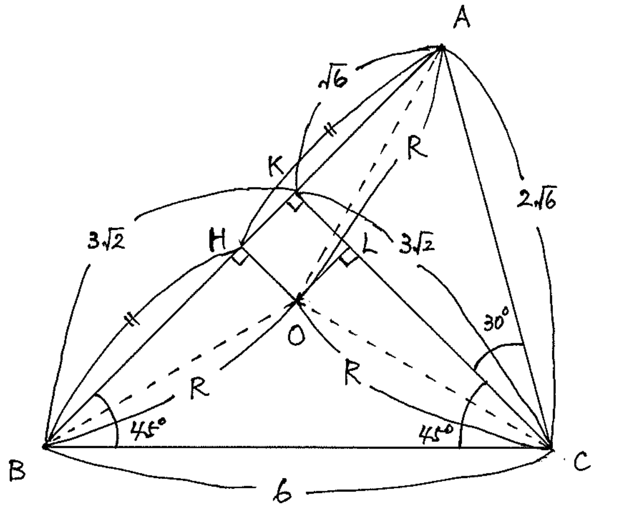
$\angle A = 180° - (45° + 75°) = 60°$ なので，題意の外接円 O の弧 AC 上に BD が円 O の直径となるよう点 D をとる．円周角の定理から $\angle BAC = \angle BDC = 60°$．$\angle BCD = 90°$ より求める半径 R は

$$\sin 60° = \frac{6}{2R} \Longleftrightarrow R = 2\sqrt{3}.$$

[*6] その精神論でうまくいった人もまれにいるようだが，ここではあくまで誰でもできる方法を追究したい．

確かに正弦定理は便利な公式だが，それを無理に暗記することよりもそのからくりを理解することの方が大切であることが分かってもらえただろうか.

上記の別解では円を補助線に使ったが，垂線を補助線に用いた別解もある．計算がやや煩雑であるが紹介しておく.



〈別解 2〉図の通り外心 O と点 C から辺 AB へそれぞれ垂線 OH, CK を引き，外心 O から線分 CK に垂線 OL を引く．このとき，三角形 BCK は直角二等辺三角形になり，$\angle ACK = 30°$ になる．よって，$BK = CK = 6/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $AK = CK/\sqrt{3} = \sqrt{6}$, かつ $AC = 2AK = 2\sqrt{6}$. 一方，$AH = BH = AB/2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$. 三平方の定理から求める半径を R とおくと，

$$OH(= KL) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2}.$$

ゆえに，

$$CL = CK - KL = 3\sqrt{2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2}. \cdots ①$$

さらに，

$$OL = HK = BK - BH = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}. \cdots ②$$

①②より，三角形 OCL は直角三角形だから

$$
\begin{aligned}
& R^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left\{3\sqrt{2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2}\right\}^2 \quad (= ③) \\
\Leftrightarrow\quad & R^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 18 - 6\sqrt{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2} + R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{R^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \\
& (\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ を利用して整頓}) \\
\Leftrightarrow\quad & R^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & R = 2\sqrt{3} (> 0).
\end{aligned}
$$

解 $R = 2\sqrt{3}$ が正しいかの検算は読者の演習に残しておく．

問題 4.1. ③に $R = 2\sqrt{3}$ を代入して $12(= (2\sqrt{3})^2)$ になるか確かめよ．

公式の成り立ちが分かっていれば，公式を覚えずともうまくいく問題は他にもある．

問題 4.2. $AB = 7, BC = 8, CA = 9$ を満たす三角形 ABC に対して $\cos\angle B$ を求めよ．

この問題を通して**余弦定理は三平方の定理の応用である**ことを思い出してほしい．余弦定理の公式を頭に詰め込むことよりもはるかに大切である．

4.2 応用

関数の問題ととるか幾何の問題ととるか，微分を利用するか否かなど，解法が異なると計算の手間や考え方がまったく異なることがありうる．次の例題で見てみよう．

例題 4.2. $a > b > 0$ とする．座標平面上の y 軸上に二点 $A(0, a), B(0, b)$ をとり，点 P が x 軸の正の部分を動くとき，$\angle APB$ が最大となる点 P の座標を求めよ．

（長岡技大）

関数の問題ととる場合，$\angle APB$ に対して sin, cos, tan のいずれをとるかで計算の難しさがまったく異なってくる．下記は $\cos\angle APB$ が最小であるときを考えようとして手詰まりになった例である．

$P = (x, 0)$ とする．$\angle OPA = \alpha, \angle OPB = \beta\ (0 < \beta < \alpha < \pi/2)$ とすると，題意から

$$
\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}},\ \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}
$$

となる．三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{x^2+ab}{\sqrt{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}}(=f(x))\end{aligned}$$

このとき，$f(x)$ を微分すると・・・($\sharp$)

たしかに $f'(x)$ は次のように求められる．

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2+ab)'\{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2\}^{\frac{1}{2}}-(x^2+ab)[\{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2\}^{\frac{1}{2}}]'}{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2} \\ &= \frac{(a-b)^2x(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})}{\{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

その後の解答は次のように続くであろう．

a, b, x がいずれも正でかつ $a>b$ であることから $f'(x)$ の正負は $x-\sqrt{ab}$ の正負と一致する．ゆえに，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{ab}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗

となるので，$f(x)$ は $x=\sqrt{ab}$ のとき最小値 $2\sqrt{ab}/(a+b)$ をとる．このとき，$\cos\angle APB$ は最小なので $\angle APB$ は最大である．よって, 求める点 P の座標は $(\sqrt{ab},0)$.

商の微分により $f'(x)$ を求めることはできるが，**複雑な計算がミスを誘発する**[*7] ことを考えるとできれば避けたいと思うのが人情である．$f(x)>0$ は $0<\alpha-\beta<\pi/2$ より明らかだから，$1/(f(x))^2$ の最大性を考えれば良いのではないだろうか．演習問題に残しておこう．

問題 4.3. (1) 次の式を示せ.

$$\frac{1}{\{f(x)\}^2}=1+\frac{(a-b)^2}{x^2+2ab+a^2b^2x^{-2}}$$

(2) $f(x)$ の最小値を求めよ.

さて，これまでは $\cos(\alpha-\beta)$ の最小性を考えたが，$\tan(\alpha-\beta)$ の最大性を考えると次のような別解が得られる．

[*7] 大学入試では，一本気な計算では解答が困難なのにトリッキーな方法で簡単に解かれる偏屈な問題がよく見られる．

〈別解 1〉 $\tan\alpha = a/x$, $\tan\beta = b/x$ より加法定理から

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{a-b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}} \\ &= \frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\end{aligned}$$

$g(x) = x+(ab)/x$ $(x>0)$ とおく．$a-b>0$ でかつ $g(x)$ は常に正なので，$\tan(\alpha-\beta)$ が最大であることと $g(x)$ が最小であることは同義である．相加相乗平均の関係から

$$g(x) \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}} = 2\sqrt{ab}.$$

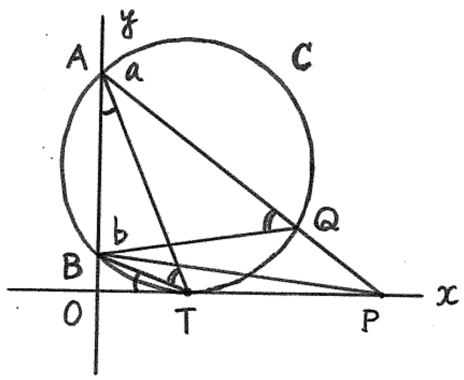
等号は $x=\sqrt{ab}$ のときに成立するから，$\tan(\alpha-\beta)$ は $x=\sqrt{ab}$ のとき最大値 $(a-b)/(2\sqrt{ab})$ をとる．よって，求める点 P の座標は $(\sqrt{ab}, 0)$.

これに類するトリックを使用した問題を挙げておく.

問題 4.4. (1) p, q, r を正の実数とする．$(p+q+r)/3 \geqq \sqrt[3]{pqr}$ を証明せよ.
(2) 次の関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ：

$$f(x) = \frac{x^6+3x^4+3x^2+17}{x^2+1}.$$

また，例題 4.2 を幾何の問題としてとると鮮やかな別解が得られる.



〈別解 2〉 二点 A, B を通りかつ x 軸に接する円 C を考える．円 C と x 軸の接点を T とする．$P=T$ であるときに $\angle APB$ は最大となる．なぜなら，$P\neq T$ のとき点 P は円 C の外側にあるから，線分 AP と円 C は交点 Q をもつ．円周角の定理より $\angle AQB = \angle ATB$ であり $\angle AQB$ は三角形 BPQ の外角だから，$\angle APB < \angle ATB$ となり $\angle APB$ は最大にならない.

接弦定理より $\angle OAT = \angle OTB$ なので，三角形 OAT と三角形 OTB は相似である．よって，$OA/OT = OT/OB$ から $OT = \sqrt{ab}$ なので求める点 P の座標は $(\sqrt{ab}, 0)$.

例題 4.2 の中で点 P の動く領域を変更すると次のように改造できる．関数の問題ととらえるか幾何の問題ととらえるかで難易度がどのように変わるか試されたい．

問題 4.5. 座標平面上に二定点 $A(0, 1/4)$, $B(0, 9/4)$ と曲線 $y = x^2$ $(x > 0)$ $(\cdots①)$ がある．曲線① を動く点 P について $\angle APB$ の最大値とそのときの点 P の座標を求めよ．

数字や条件を改造した自作問題を解くことでも実力はつく．日々の数学の問題演習にて実践してほしい．

5 最大［小］値の問題は定義域内の値を代入して最大［小］性を確認せよ

最大［小］値の問題は定期試験や入試などでも非常によく出題されるが，最大［小］というからには他の値より大きく［小さく］なければならない．

5.1 基本

二次関数は高校や高専で学ぶ関数の代表例である．ここでは，二次関数の例題について考えてみよう．

例題 5.1. 二次関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ $(\cdots①)$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲での最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

（2012 年，西南学院大，改題）

ここでは誤答例を二つ紹介する．まず次の誤答例を見てみよう．

> 与式より $y = 2(x-1)^2 - 1$ が成立するので，$x = 1$ のとき最小値 -1, $x = 2$ のとき最大値 1 (★) である．

この答が正しいならば $x = -1$ **を ① に代入すると** $y \leqq 1$ **となるはず**である．しかし，$x = -1$ のとき $y = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 1 = 7 > 1$ となり矛盾する．

「もっときちんと確認したい」という方には次の方法を勧めたい：(★) の答が正しければ，① より $2x^2 - 4x + 1 > 1 \Longleftrightarrow x < 0$ または $2 < x$ $(\cdots②)$ をみたす x が $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に**存在してはならない**はずである．しかし，$x = -1$ は ② をみたしてしまい不適である．よって，1 は求める最大値として正しくない．

もちろん以上の方法は完全な方法ではない．もう一つの誤答例で見てみよう．

与式より $y=2(x+1)^2-1$ (…③) (★) が成立するので，$x=-1$ のとき最小値 -1, $x=2$ のとき最大値 17 である．

この場合は $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲のどの x を代入しても $y<-1$ または $17<y$ とならない．また，$2x^2-4x+1<-1 \iff$ 解なしでかつ，$2x^2-4x+1>17 \iff x<-2$ または $4<x$ なので，前の誤答例に対する方法では対処ができない．しかし，$x=1$ のとき，① では $y=-1$, ③ では $y=7$ なので **① から ③ への変形で誤った**ことが分かる．また，$2x^2-4x+1=17 \iff x=-2$ または 4 なので，上記の「$x=2$ のとき最大」も間違いである．次のことも確かめてみよ．

問題 5.1. $2x^2-4x+1=-1$ の解に $x=-1$ は含まれないことを示せ．

たかが二次式の問題でも次のように**改造すれば良い訓練に**なるだろう．計算に自信がある方は試されたい．

問題 5.2. 実数 a を越えない最大の整数を $[a]$ とする．$[2x^2-4x+1]=1$ をみたす実数 x を求めよ．

問題 5.3. 二次関数 $y=2x^2-4x+1$ の $\sqrt{2}-2 \leqq x \leqq \sqrt{2}+1$ 範囲での最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

5.2 応用

関数が多項式ではなく，無理式や対数関数などが含まれていると結構やっかいな計算となることもある．いくつかの例題で検証してみよう．

例題 5.2. 関数 $f(x)=x(\log x)^2$ $(0<x<1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

（2013 年，福岡大・医，改題）

ていねいに式変形を行わないことによる誤答例を挙げよう．

$f'(x)=(\log x)^2+2\log x=(\log x)(\log x+2)$ なので，$f'(x)=0 \iff x=e-2$ (★). よって，$f(x)$ の増減表は次の通り．

x	(0)	$\cdots$	$e-2$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$(e-2)\{\log(e-2)\}^2$	$\searrow$	(0)

ここで, $\lim_{x\to 0+0} x(\log x)^2=0$ かつ $\lim_{x\to 1-0} x(\log x)^2=0$ を用いた．よって, $x=e-2$ のとき最大値は $(e-2)\{\log(e-2)\}^2$.

「訂正以前に $\lim_{x\to 0+0} x(\log x)^2=0$ の証明が完了していないのが気持ち悪い」という方

は次の問題に取り組まれたい．

問題 5.4. $\lim_{x\to 0+0} x(\log x)^2 = 0$ を証明せよ．

　$\log x + 2 = 0$ をていねいに $\log x = -2$ と変形すれば，対数の定義を用いて $x = e^{-2}$ となるので，上記増減表は

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	(0)

と訂正されて，「$x = e^{-2}$ のとき最大値 $4e^{-2}$ が」正解となることは理解できよう．

　関数電卓を使うと $4e^{-2} \fallingdotseq 0.5413$, $(e-2)\{\log(e-2)\}^2 \fallingdotseq 0.0786$ なので違いが明白だが，**大半の定期／入学試験では電卓の持ち込みが禁止されている日本の現状**を考えると手計算で確認する方法を考えることが妥当である．しかし，$(e-2)\{\log(e-2)\}^2$ の近似値を手計算で求めることは困難であり，試験場で行うのは現実的でない．そこで完璧な計算ミス防止にはならないが，次のように背理法を応用して考える：もし，$(e-2)\{\log(e-2)\}^2$ が求める最大値ならば，$(e-2)\{\log(e-2)\}^2 > f(1/e) = 1/e$ であるはず．これから，

$$\frac{1}{e(e-2)} < \{\log(e-2)\}^2$$

が成立する．両辺の正の平方根をとった後で両辺の指数をとると，

$$e^{\frac{1}{\sqrt{e(e-2)}}} < \frac{1}{e-2} \quad \cdots④$$

ここで，$2.71 < e < 2.72$ だから

$$\frac{1}{\sqrt{e(e-2)}} > \frac{1}{\sqrt{2.72\times 0.72}} = \frac{1}{\sqrt{1.9584}} > \frac{1}{\sqrt{1.96}} = \frac{1}{1.4} > 0.71.$$

また，すべての実数 x に対して $e^x \geqq 1 + x$ $(\cdots⑤)$ なので，④ の左辺は 1.71 より大きい．しかし，④ の右辺は

$$\frac{1}{e-2} < \frac{1}{0.71} < 1.41$$

であり矛盾している．

問題 5.5. 上記 ⑤ を証明せよ（等号成立条件も述べること）．

　先述の矛盾の導き方のように，**成立が見込まれる不等式を一旦仮定して，それを同値変形して（不）成立を確認する**トリックはよく用いられる．簡単な問題を一つ紹介しておくので試されたい．

問題 5.6. a, b を正の実数とするとき，次の二つの実数の大小を比べよ．

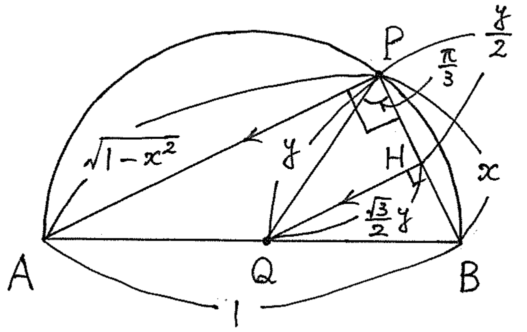
$$A = \frac{2ab}{a+b}, \quad B = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

次の例題も計算ミスをすると修正が厄介な問題である．

例題 5.3. 直径 1 の半円がある．直径の両端を A, B とする．半円の弧 AB 上に点 P をとり，線分 AB 上に $\angle BPQ = \pi/3$ となるように点 Q をとる．$BP = x, PQ = y$ とおく．
(1) y を x で表せ．
(2) y の最大値とそのときの x の値を求めよ．

（2012 年，東北大・理系，改題）

(1) は正解して (2) で計算ミスをした事例を挙げよう．**一本気な計算で突撃して大変なことに**なってしまった誤答例である．



(1) 題意より $0 < x < 1$ かつ $y > 0$ は明らか．上図のように点 Q から辺 BP に垂線 QH を下ろすと，二直線 AP, QH は平行なので，三角形 APB と三角形 QHB は相似である．また，$QH = y\sin(\pi/3) = \sqrt{3}y/2$, $PH = y\cos(\pi/3) = y/2$ で，三平方の定理より $AP = \sqrt{1-x^2}$. よって，$QH/HB = AP/PB$ より

$$\frac{x-\frac{y}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

これを y について解くと，

$$y = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{1-x^2}}. \quad \cdots⑥$$

(2) (1) より

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})-2x\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{3}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2} \quad (=\text{Ⓐ})\\
&= \frac{2(1-2x^2)(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})-2x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3(1-x^2)}-x)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2} \quad (=\text{Ⓑ})\\
&= \frac{2\{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{3}x^3-2x^2\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{3}x(1-x^2)+2x^2\sqrt{1-x^2}\}}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2} \quad (\bigstar)(=\text{Ⓒ})\\
&= \frac{2(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}x)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2} \quad (=\text{Ⓓ})
\end{aligned}
$$

$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}x=0 \Longleftrightarrow x=1/2$ なので，y の増減表は次の通り．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
y'		$+$	0	$-$	
y	(0)	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(0)

したがって，$x=1/2$ のとき y は最大値 $1/2$ をとる．

解法は一応正しくて答も一見きれいだが，間違いである以上はいくらかの減点は避けられない．実際，$x=3/5$ とすると $\sqrt{1-x^2}=4/5$ で，$\sqrt{3}<1.74$ から

$$
y=\frac{2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}=\frac{24}{5(4+3\sqrt{3})}>\frac{24}{5\cdot(4+3\times1.74)}=\frac{24}{46.1}>\frac{24}{48}=\frac{1}{2}.
$$

となり $1/2$ は求める最大値ではないことが分かる．また，$x=1/2$ のとき $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}/2$ であることを利用すれば，Ⓐ $=1/3$, Ⓑ $=1/3$, Ⓒ $=0$, Ⓓ $=0$ となって**Ⓑ と Ⓒ の間で計算ミスが生じたのではないか**と考えられる．Ⓑ の式から計算し直すと，

$$
\begin{aligned}
\text{Ⓑ} &= \frac{2(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{3}x^3-2x^2\sqrt{1-x^2})-2\sqrt{3}x(1-x^2)+2x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2}\\
&= \frac{-2\sqrt{3}x^3+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2}\\
&= \frac{2\{(\sqrt{1-x^2})^3-(\sqrt[6]{3}x)^3\}}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2})^2}.
\end{aligned}
$$

$(\sqrt{1-x^2})^3-(\sqrt[6]{3}x)^3=0 \Longleftrightarrow 1-x^2=\sqrt[3]{3}x^2 \Longleftrightarrow x=(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{2}}$ より上記増減表は下記の通り修正される．

x	(0)	$\cdots$	$(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	(1)
y'		$+$	0	$-$	
y	(0)	↗	最大	↘	(0)

$x=(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{2}}$ のとき $\sqrt{1-x^2}=\sqrt[6]{3}x$ なので,

$$y=\frac{2\cdot\sqrt[6]{3}x^2}{(\sqrt{3}+\sqrt[6]{3})x}=2x^3=2(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{3}{2}}$$

が求める最大値である．

もう少し失敗の原因を掘り下げて考えてみよう．前記のような計算ミスが発生した原因の一つとして考えられるのは**⑥の右辺の分母の項が二つであるゆえに y' の分子の項が多くなった**ことである．前記の誤答は複雑な計算がミスを誘発する典型例とも言える．

そこで，このように考えてはいかがだろうか：⑥の右辺の分子と分母はともに正なので，$1/y$ を最小にする x の値を考えれば良い．

$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{3}x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-1}(=f(x)).$$

これより,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-2}=\frac{1}{2}x^{-2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\{\sqrt{3}x^3-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\}$$

$\sqrt{3}x^3-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=0 \iff x=(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{2}}$ より $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$(1+\sqrt[3]{3})^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	最小	$\nearrow$	(∞)

となる．以降は修正部分と同様である．

与えられた問題をひたすら解くだけではなく，次のように改造して解くことも良い訓練である．前の修正版にならって解いても良いし，問題 5.6 の結果を利用するのも手だろう．

問題 5.7. 直径 1 の半円がある．直径の両端を A, B とする．半円の弧 AB 上に点 P をとり，線分 AB 上に $\angle BPQ=\pi/4$ となるように点 Q をとる．$BP=x, PQ=y$ とおく．y の最大値とそのときの x の値を求めよ．

与えられた関数自身ではなく，その逆数や対数をとったり，一部分を調べたりすることで与えられた関数の最大値や最小値が分かる場合は他にもある．次の問題で試されよ．

問題 5.8. $0<x<\pi/2$ とする．関数

$$f(x)=\frac{2\cos x}{25\cos 2x+32\cos x+43}$$

の最大値を求めよ．

問題 5.9. $x>0$ とする．関数 $g(x)=x^x$ の最小値を求めよ．

6 文字定数付き問題は適当な数値を代入して題意成立を確認せよ

文字定数が式の中に混じったことにより，わずらわしい計算や考察を経て出てきた誤答に気がつかないまま試験が終わってしまうこともよくある．この節では色々な例題についてそのような事例を見ていこう．

6.1 基本

まずは公式を暗記したことによる誤答例から紹介しよう．

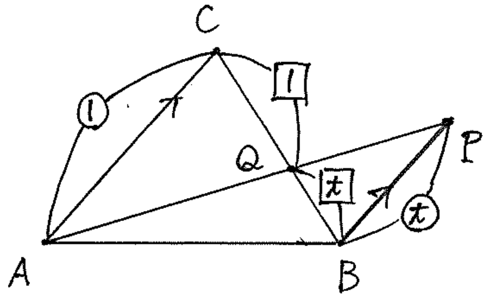
例題 6.1. ある平面上で相異なる 3 点 A, B, C は同一直線上にないとする．t を 0 以上の実数として $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ $(\cdots Ⓐ)$ となるように点 P を平面上に定める．線分 AP と線分 BC の交点を Q とする．このとき，$\overrightarrow{AQ}$ を $t, \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

（2012 年，室蘭工大・工，改題）

平面ベクトルの内分点の公式を誤用したことによる事例を紹介する．

Ⓐ $\iff \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{AC}$ より直線 BP は直線 AC に平行である．よって，$BQ : CQ = BP : CA = t : 1$ なので平面ベクトルの内分点の公式より

$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}. \quad (★) \quad \cdots ①$$



鬼軍曹的先生方からは「この程度の公式ぐらい正しく暗記しないと駄目だ！類題を百題やれ！」などと厳しいご意見があるだろう．しかし，それ以前にこのような確認をしておくべきではないだろうか：$t = 0$ とすると，① より $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC}$. つまり，$C = Q$. しかし，$t$ が 0 に近づくとき，点 Q は点 B に近づくことは図より明らか．$C \neq B$ なので不合理である．

今の場合，① は
$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{1+t}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}$$
とすべきであった．しかし，この失敗も次のような別解を考えると次に活かせるであろう．

〈別解〉（$BQ : CQ = BP : CA = t : 1$ を導くくだりまでは前述の誤答に同じ．）したがって，$\overrightarrow{BQ} = \{t/(1+t)\}\overrightarrow{BC} = \{t/(1+t)\}\overrightarrow{AC} - \{t/(1+t)\}\overrightarrow{AB}$. よって，
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{1+t}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}.$$

ベクトルを苦手とする方はかなり多いようだが，原因の一つとして考えられるのは直観的または幾何的発想を捨てて公式の暗記に走りがちな点ではないだろうか．例えば $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ のように「頭と尻をつなげる」ような直観的発想を利用すれば次の難問も意外と簡単に解かれる．

問題 6.1. n を 3 以上の整数とする．次の等式を証明せよ：
$$\begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{2}{n}\pi\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right) & = 0 \\ \sin\left(\frac{2}{n}\pi\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right) & = 0. \end{cases}$$

二次関数の問題ですら文字定数が混ざることで意外とミスが出る．

例題 6.2. a を正の実数とし，$f(x) = -a^2x^2 + 4ax$ とする．このとき，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

（2009 年，神戸大，改題）

平方完成を誤ったと思われる誤答を紹介しよう．このタイプのミスも多い．

$$\begin{aligned} f(x) &= -a^2x^2 + 4ax (= ②) \\ &= -a^2\left(x^2 - \frac{4}{a}x\right)(= ③) \\ &= -a^2\left\{\left(x - \frac{4}{a}\right)^2 - \frac{16}{a^2}\right\}(= ④) \quad (★) \\ &= -a^2\left(x - \frac{4}{a}\right)^2 + 16(= ⑤) \end{aligned}$$

より $y = f(x)$ のグラフは上に凸でかつ $x = 4/a$ を軸にもつ．よって，次の三通りに分けて考える．

(i) $2 < 4/a \Longleftrightarrow 0 < a < 2$ のとき，最大値 $f(2) = -4a^2 + 8a$, 最小値 $f(0) = 0$.

(ii) $4/a \leqq 2 < 8/a \Longleftrightarrow 2 \leqq a < 4$ のとき，最大値 $f(4/a) = 16$, 最小値 $f(0) = 0$.

(iii) $8/a \leqq 2 \Longleftrightarrow a \geqq 4$ のとき，最大値 $f(4/a) = 16$, 最小値 $f(2) = -4a^2 + 8a$.

今度は平方完成のくだりで間違えてしまっているので，例題 6.1 とは異なり部分点を取ることも厳しいだろう．前述の誤答で $a=1$ とすると次のように読み替えられる（(i) の場合のみを考えれば良い）．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2+4x(=②') \\
&= -(x^2-4x)(=③') \\
&= -\{(x-4)^2-16\}(=④') \quad (\bigstar) \\
&= -(x-4)^2+16(=⑤')
\end{aligned}
$$

より $y=f(x)$ のグラフは上に凸でかつ $x=4$ を軸にもつ．よって，最大値 $f(2)=4$, 最小値 $f(0)=0$.

丸囲み数字には ′ をつけた．さて，⑤′ を展開すると $-x^2+8x \neq$ ②′ なので誤答であることは分かる．同様に③′ ④′ を展開すると，

$$
③' = ②', \quad ④' = -\{x^2-8x+16-16\} = -x^2+8x \neq ②'
$$

なので **③ と ④の間で計算ミスが生じたのではないか**と考えられる．③ 以後は次のように訂正される．

$$
\begin{aligned}
③ &= -a^2\left\{\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a^2}\right\} \\
&= -a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+4
\end{aligned}
$$

より，

(i) $2<2/a \Longleftrightarrow 0<a<1$ のとき，最大値は $f(2)=-4a^2+8a$, 最小値は $f(0)=0$.

(ii) $2/a \leqq 2 < 4/a \Longleftrightarrow 1 \leqq a < 2$ のとき，最大値は $f(2/a)=4$, 最小値は $f(0)=0$.

(iii) $4/a \leqq 2 \Longleftrightarrow 2 \leqq a$ のとき，最大値 $f(2/a)=4$, 最小値 $f(2)=-4a^2+8a$.

$ax=t$ と **変数を x から t へ変換すると**次のような別解が得られる．

〈別解〉 $ax=t$ とすると $f(x)=-t^2+4t(=g(t))$ かつ $0 \leqq x \leqq 2 \Longleftrightarrow 0 \leqq t \leqq 2a$ となるから，$0 \leqq t \leqq 2a$ の範囲で $g(t)$ の最大値と最小値を求めればよい．

$$
g(t) = -(t^2-4t) = -\{(t^2-4t+4)-4\} = -(t-2)^2+4
$$

より

(i) $2a<2 \Longleftrightarrow 0<a<1$ のとき，$t=2a \Longleftrightarrow x=2$ のとき最大値 $g(2a)=-4a^2+8a$. $t=0 \Longleftrightarrow x=0$ のとき最小値 $g(0)=0$.

(ii) $2 \leqq 2a < 4 \Longleftrightarrow 1 \leqq a < 2$ のとき, $t=2 \Longleftrightarrow x=2/a$ のとき最大値 $g(2)=4$. $t=0 \Longleftrightarrow x=0$ のとき最小値 $g(0)=0$.

(iii) $4 \leqq 2a \Longleftrightarrow 2 \leqq a$ のとき，$t=2 \Longleftrightarrow x=2/a$ のとき最大値 $g(2)=4$. $t=2a \Longleftrightarrow x=2$ のとき最小値 $g(2a)=-4a^2+8a$.

6.2　応用

あえて文字定数を混ぜることで問題を難しくする手法は難関校の入試問題などでよく見られるが，そこに文章題や複数分野の融合問題が絡むとよりいっそう難しくなる．

例題 6.3. n を 3 以上の整数とする．中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて，そのうち 3 個が赤で残りが白とする．A 君と B 君が交互に 1 個ずつ玉を取り出して，先に赤玉を取り出した方が勝ちとする．取り出した玉は袋には戻さないとする．A 君が先に取り始めるとき，B 君が勝つ確率を求めよ．

（2005 年，東北大・理系・後期，改題）

以下，A 君と B 君の取り出す回数を通しで数えることにする．このとき，B 君は $2k$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ 回目に赤玉を取り出すことになる．$k = 1$ のとき，題意の確率は $\{(2n-3)/2n\} \cdot \{3/(2n-1)\} = 3(2n-3)/\{2n(2n-1)\}$. $k \geqq 2$ のとき，

$$\frac{2n-3}{2n} \cdot \frac{2n-4}{2n-1} \cdots \frac{2n-2k-1}{2n-2k+2} \cdot \frac{3}{2n-2k+1} = \frac{3(2n-2k)(2n-2k-1)}{2n(2n-1)(2n-2)}.$$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，それぞれ B 君が勝つ事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}
& \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{3(2n-2k)(2n-2k-1)}{2n(2n-1)(2n-2)} (= ⑥) \\
= \quad & \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)} + \frac{3}{2n(2n-1)(2n-2)} \sum_{k=2}^{n-1} 4n^2 - 2n + (2-8n)k + 4k^2 (= ⑦) \\
= \quad & \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)} + \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)} \\
& \times \left\{ 3(4n^2-2n)(n-1) + \frac{3}{2}(2-8n)(n-1)n + 2(n-1)n(2n-1) \right\} (\bigstar) (= ⑧) \\
= \quad & \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)} + \frac{n(n-1)(4n-5)}{4n(2n-1)(n-1)} (= ⑨) \\
= \quad & \frac{4n^2+7n-18}{4n(2n-1)} (= ⑩)
\end{aligned}$$

$n = 3$ とすると，題意を満たす事象は (i) B 君が 2 回目にはじめて赤玉を引いて勝利するか，または (ii) B 君が 4 回目にはじめて赤玉を引いて勝利するかのいずれかである．(i) の確率は $(3/6) \cdot (3/5) = 3/10$, (ii) の確率は $(3/6) \cdot (2/5) \cdot (1/4) \cdot (3/3) = 1/20$. (i) (ii) の事象は互いに排反であるから，求める確率は $(3/10) + (1/20) = 7/20$. よって，**⑥ 〜 ⑩ のいずれに $n = 3$ を代入しても 7/20 になるはず**である．しかし，そうはならないことを次の問題を解くことで確かめられたい．

問題 6.2. $n=3$ のとき ⑥ 〜 ⑩ の値を求めよ.

こうして ⑧ を修正すれば正答が $(4n-5)/(8n-4)$ であることが分かる. しかし, **❼❽間でのミスが生じた原因の一つは ❻ の $\sum$ 内の分子を展開したこと**である. 理由もなく項数をむやみに多くする行為は計算ミスを誘発する.「急がば回れ」とことわざに言うように $n-k=m$ として次の通り因数分解を活用してはどうだろうか.

$n-k=m$ とすると, $2n-2k=2m, 2n-2k-1=2m-1$ なので,

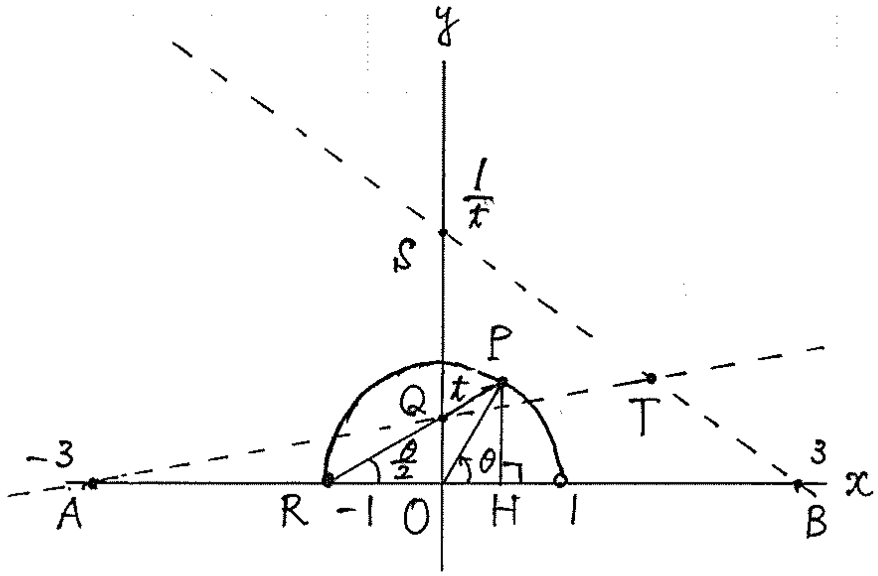
$$\begin{aligned}
⑥ &= \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)}+\frac{3}{2n(2n-1)(2n-2)}\sum_{m=1}^{n-2}2m(2m-1)\\
&= \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)}+\frac{3}{2n(2n-1)(2n-2)}\left\{4\sum_{m=1}^{n-2}m^2-2\sum_{m=1}^{n-2}m\right\}\\
&= \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)}+\frac{2(n-2)(n-1)(2n-3)-3(n-2)(n-1)}{2n(2n-1)(2n-2)}\\
&= \frac{3(2n-3)}{2n(2n-1)}+\frac{(n-2)(n-1)(4n-9)}{4n(2n-1)(n-1)}\\
&= \frac{6(2n-3)+(4n^2-17n+18)}{4n(2n-1)}\\
&= \frac{n(4n-9)}{4n(2n-1)}\\
&= \frac{4n-9}{8n-4}.
\end{aligned}$$

文字定数がついたままだと答が誤りか一見はっきりしなくなるが, 文字に値を代入するだけで誤答のおかしさが露になることがある. 普段の問題演習でも積極的に試されたい.

例題 6.4. 単位円周の一部 $x^2+y^2=1$ $(y>0)$ を C とする. C 上の点 P と点 $R(-1,0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし, その座標を $(0,t)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.
(1) 点 P の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とする. $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t の式で表せ.
(2) 3 点 $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $S(0,1/t)$ に対し, 2 直線 AQ と BS の交点を T とする. 点 P が C 上を動くとき, 点 T の描く図形の方程式を求めよ.

(弘前大・理工・医, 改題)

例によって誤答から紹介しよう.



(1) $0<\theta \leqq \pi/2$ の場合を考える（$\pi/2<\theta<\pi$ の場合も同様）．上図のように点 P から x 軸に垂線 PH を下ろす．このとき，二直線 QO, PH は平行なので $RO/QO = RH/HP$. $RO=1$, $QO=t$, $RH=1+\cos\theta$, $HP=\sin\theta$ なので，$\sin\theta = t+t\cos\theta$. (⋯⑪) また，点 P は C 上にあるので $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. (⋯⑫) ⑪ を ⑫ に代入すると，

$$(1+t^2)\cos^2\theta+2t^2\cos\theta+t^2-1=0.$$

左辺を因数分解すると $\{(1+t^2)\cos\theta+t^2-1\}(\cos\theta+1)$. $0<\theta<\pi$ より $\cos\theta+1>0$. したがって, $\cos\theta=(t^2-1)/(1+t^2)$ (★) (⋯⑬). ⑬ を ⑫ に代入すると $\sin\theta=2t^3/(1+t^2)$ (⋯⑭).

(2) 直線 AQ の方程式は $y=(t/3)(x+3)$ (⋯⑮), 直線 BS の方程式は $y=-\{1/(3t)\}x+(1/t)$ (⋯⑯). ⑮ ⑯ を連立すると

$$x=\frac{3-3t^2}{t^2+1}(\cdots⑰),\quad y=\frac{2t}{t^2+1}.(\cdots⑱)$$

よって，・・・(♯)

一応，(♯) から正答は導かれる：⑰ から $t^2+1=6/(x+3)$ かつ $t^2=(3-x)/(x+3)$. これらを ⑱ の両辺を二乗して得られる式

$$(t^2+1)^2y^2=4t^2$$

に代入して整理すると，

$$\frac{9y^2}{(x+3)^2}=\frac{3-x}{x+3}.\quad \cdots⑲$$

$x+3=6/(t^2+1)>0$ より ⑲ の両辺に $(x+3)^2$ をかけて整理すると，

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1. \quad \cdots ⑳$$

$t>0$ と ⑱ から，求める方程式は ⑳ の $y>0$ の部分である．

このように (2) を力で押しきることもできる．ただ，(1) を正解していれば上記のような煩雑な変形をせずとも (2) の正解を得られただけに非常に惜しまれる誤答である．

$\theta=\pi/3$ とすると $\angle QRO=\pi/6$ より $t=OQ=1/\sqrt{3}$. したがって，$t=1/\sqrt{3}$ のとき ⑬ から $\cos\theta=\cos(\pi/3)=1/2$ となるはず．しかし，⑬ より

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}.$$

⑪ と ⑫ を連立した方程式を解き直すと

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}. \quad \cdots ㉑$$

この答の確認は演習問題としよう．

問題 6.3. ㉑ が ⑫ を満たすことを確かめよ．

⑰ ⑱ から $\cos\theta=x/3$ かつ $\sin\theta=y$ なので ⑳ が得られる．$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta=y>0$ も分かる．

7　不定積分は微分で検算せよ

足し算と引き算のように微分と積分も対を成す演算として考えられる．$8-3=5$ という引き算の検算を $5+3=8$ と足し算で行なったように，不定積分の検算は微分を用いて行われる．

7.1　基本

不定積分でありがちな計算ミスの一つに係数や累乗の誤りがある．不定積分での計算ミスは定積分の計算ミスの原因にもなるので十分注意してほしい．次の例題で具体的に考えてみよう．

例題 7.1. 次の不定積分を求めよ．

$$(1)\quad \int (2-x)(x-1)\,dx \qquad (2)\quad \int \sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

(1) の次の誤答は係数を誤ったものである．

$$\text{与式} = \int -x^2+3x-2\,dx = -3x^3+6x^2-2x+C \ (\bigstar)$$

ただし，C は積分定数.

$-3x^3+6x^2-2x+C$ を x で微分すれば $(2-x)(x-1)$ となるはずだが，

$$(-3x^3+6x^2-2x+C)' = -9x^2+12x-2$$

となり $-9x^2+12x-2$ は $x-1$ で割りきれないので不適である．詳細は演習問題とする．

問題 7.1. $-9x^2+12x-2$ を $x-1$ で割ったときの商と余りを求めよ．

答の係数が合わなかったとはいえ次数は合っていたのだから，次のような別解を使って立て直せるのではないだろうか.

〈別解〉積分されている関数は 2 次式だから，答は 3 次式である．よって，求める式は $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+C$（$C$ は積分定数）とおける．$(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+C)' = 3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ なので，$3\alpha=-1, 2\beta=3, \gamma=-2 \iff \alpha=-1/3, \beta=3/2, \gamma=-2$. よって，求める不定積分は $-(1/3)x^3+(3/2)x^2-2x+C$.

次に紹介する (2) の誤答は累乗を誤った例である．面倒がって累乗の計算を暗算で済ませた結果，$1/\sqrt[3]{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$ と勘違いしたのだろうか.

$$\text{与式} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C \ (\bigstar)$$

ただし，C は積分定数.

この誤答も x で微分することにより

$$\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C\right)' = x^{\frac{1}{3}} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

となり誤りであることが分かる．また，この誤りから $1/\sqrt[3]{x^2}$ の項の積分を誤っていたことにも気付く．正答は次の通り：

$$\text{与式} = \int x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C.$$

ただし，C は積分定数.

自信を持つことは決して悪いことではないが，普段の学習では**自分の計算力を過信せずにしっかり検算する**習慣を身に付けてほしい．また，試験のときにも時間に余裕があれば検算することを勧める．この正答の検算は演習問題に残しておく．

問題 7.2. $(3/4)x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C$ を x で微分せよ．

例題 7.2. 次の不定積分を求めよ．

$$(1)\quad \int \sin^2 x \cos x\, dx \qquad (2)\quad \int x^2 \log x\, dx$$

次の (1) の誤答例は二倍角の公式を誤って暗記したことが原因と考えられるものである．

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{\cos 2x - 1}{2} \cos x\, dx \quad (\bigstar)\ (= ①) \\
&= \frac{1}{2}\int \cos 2x \cos x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos 3x + \cos x}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx\ (= ②) \\
&= \frac{1}{4}\int \cos 3x\, dx - \frac{1}{4}\int \cos x\, dx \\
&= \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x + C
\end{aligned}$$

ただし，① にて二倍角の公式を，② にて和積公式を用いた．また，C は積分定数．

数学の得意な方がたまにしそうなミスである．たくさん公式を並べているが最初の段階で間違えているので，実際の試験ではこの答案にはほとんど点数はつかないであろう．

さて，① を x で微分する．このとき，前述の答が正しいならば $\sin^2 x \cos x$ となるはずである．加法定理より $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ である．また，sin と cos の定義から $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. よって，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}① &= \frac{1}{2}\cos 2x \cos x - \frac{1}{2}\cos x \\
&= \frac{1}{2}\cos x(\cos 2x - 1) \\
&= \frac{1}{2}\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = -\sin^2 x \cos x
\end{aligned}$$

となるので ① でミスが発生していたことが分かる．ただ，上記の誤答も二倍角の公式を正しく使っていれば一応正解は出る．

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2}\int \cos x - \cos x \cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \cos x - \cos 3x\, dx \\
&= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x + C\ (= ③)
\end{aligned}$$

三角関数では，二倍角の公式，半角の公式，三倍角の公式，和積公式，sin と cos の合成など公式の類が多く見られるが，これらは**全部加法定理から導かれる**．よって，高校レベ

ルの三角関数で覚えるとしたら加法定理と sin, cos の定義ぐらいで十分である．[*8]とくに，受験を控えた方は難しい漢字や英単語など他にも覚えるべき事項があるのだから，そちらに脳の“容量”をとっておくべきではないだろうか．

例題 7.2 (1) の別解を示しておく．

〈別解〉 $s=\sin x$ とおくと，$ds/dx=\cos x$ なので

$$\text{与式} = \int s^2 ds = \frac{1}{3}s^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C (= ④)$$

ただし，C は積分定数．

「③ と ④ が違うのでおかしい」という方には次の問題を解くことを勧める．

問題 7.3. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を証明せよ．

次の (2) の誤答は部分積分公式を誤って暗記したことによるものである．

$f'(x)=x^2,\ g(x)=\log x$ とすると $f(x)=x^3/3+C,\ g'(x)=1/x$ なので，

$$\text{与式} = \frac{1}{3}x^3\log x + \frac{1}{3}\int x^2\,dx\ (\bigstar) = \frac{1}{3}x^3\log x + \frac{1}{9}x^3 + C.$$

ただし，C は積分定数．

上式右辺を x で微分すると $x^2\log x + (2/3)x^2$ なので誤りである．中辺を x で微分しても同じであるから，左辺から中辺の間でミスが生じたことが分かる．

部分積分公式を誤って暗記している方は結構いるようである．

$$\begin{cases} \text{(X)} \quad \displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) + \int f(x)g'(x)\,dx \\ \text{(O)} \quad \displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \end{cases}$$

この誤解の原因の一つとして考えられるのは，**部分積分公式が積の微分**[*9]**から導かれる**ことを理解していないことである．積の微分 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ から

$$f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x).$$

この式の両辺を x で不定積分すれば良いだけである．部分積分公式を覚える道理がどこにあるのだろうか．正答は各自で考えられたい．答を微分して確認することもお忘れなく．

問題 7.4. 例題 7.2 (2) を正しく解け．

[*8] 厳しい方は「加法定理も sin, cos の定義から導かれるので暗記不要だ」と仰られるであろう．ただ，加法定理の証明方法は多数知られているものの少し手間がかかる．実際，1999 年には東大で加法定理の証明が出題された．

[*9] 積の微分自体も導関数の定義から導かれる．

7.2　応用

もとの関数がシンプルでも不定積分後に汚ない形の関数になることもある．しかし，微分を行えばもとの関数に戻るという基本を忘れずにできるだけしっかりと検算してほしい．

例題 7.3. a は 0 でない実定数とする．このとき，次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{ax}\cos x\,dx, \quad \int e^{ax}\sin x\,dx$$

（三重大，東北大，編入，改題）

ここでも部分積分を誤ったことによる誤答を紹介する．

$I=\int e^{ax}\cos x\,dx$, $J=\int e^{ax}\sin x\,dx$ とする．部分積分により

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos x-\frac{1}{a}J\ (\bigstar)\ (\cdots ⑤), \qquad J=\frac{1}{a}e^{ax}\sin x-\frac{1}{a}I\ (\cdots ⑥)$$

この二つを連立すると，

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2-1}(a\cos x-\sin x)+C_1, \quad J=\frac{e^{ax}}{a^2-1}(a\sin x-\cos x)+C_2.$$

ここに，C_1, C_2 は積分定数である．

I を x で微分すると $e^{ax}\cos x$ とならなければならない．しかし，この答に従うと

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dx} &= \frac{1}{a^2-1}\{ae^{ax}(a\cos x-\sin x)+e^{ax}(-a\sin x-\cos x)\}\\ &= \frac{1}{a^2-1}\{(a^2-1)e^{ax}\cos x-2ae^{ax}\sin x\}\\ &= e^{ax}\cos x-\frac{2a}{a^2-1}e^{ax}\sin x.\end{aligned}$$

計算ミスは ⑤ または ⑥ で発生したと考えられる．⑤ の右辺を x で微分すると $e^{ax}\cos x$ とならなければならないが，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos x-\frac{1}{a}J\right)=\frac{1}{a}(ae^{ax}\cos x-e^{ax}\sin x)-\frac{1}{a}e^{ax}\sin x=e^{ax}\cos x-\frac{2}{a}e^{ax}\sin x$$

なので ⑤ は誤りである．一方，⑥ の右辺を x で微分すると $e^{ax}\sin x$ とならなければならない．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin x-\frac{1}{a}I\right)=\frac{1}{a}(ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x)-\frac{1}{a}e^{ax}\cos x=e^{ax}\sin x$$

より ⑥ は正しい．部分積分により ⑤ は

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos x + \frac{1}{a}J \quad \cdots ⑤'$$

と修正される．⑤′ ⑥ を連立すると

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x + \sin x) + C_1 \ (= ⑦), \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x) + C_2 \ (= ⑧)$$

が得られる．この正答の検算は演習問題とする．

問題 7.5. ⑦, ⑧ を微分し，それぞれ $e^{ax}\cos x$, $e^{ax}\sin x$ となるか確認せよ．

次の例題は様々な別解が知られる点で有名な問題である．

例題 7.4. b を正の定数とする．次の定積分を求めよ．

$$\int_0^b \sqrt{x^2+1}\,dx$$

知識があれば意外と楽に解くこともできるが，微分積分を習いたての方は三角関数への置換積分に走りがちではないだろうか．その場合には正確で粘り強い計算力が求められる．たった一カ所つまづいただけでかなりずれた誤答になってしまうからである．

$x = \tan\theta$ とおくと，$dx/d\theta = 1/\cos^2\theta$. φ を $0 < \varphi < \pi/2$ かつ $b = \tan\varphi$ をみたすものとすると，

$$\begin{aligned} 与式 &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1+\tan^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos^3\varphi}\,d\theta \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta. \ (= ⑨) \end{aligned}$$

ここで，$s = \sin\theta$ とおく．$\sin\varphi = t$ とする．$b > 0$ なので，$\cos\varphi = 1/\sqrt{1+b^2}$ より

$t = b/\sqrt{1+b^2}$ となることに注意する．このとき，

$$
\begin{aligned}
⑨ &= \int_0^t \frac{1}{(1-s^2)^2}\,ds \\
&= \int_0^t \left\{\frac{1}{(1-s)(1+s)}\right\}^2 ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right)^2 ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}+\frac{2}{(1-s)(1+s)}+\frac{1}{(1+s)^2}\,ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}+\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}+\frac{1}{(1+s)^2}\,ds\ (= ⑩) \\
&= \frac{1}{4}\Big[(1-s)^{-1}+\log|1-s|+\log|1+s|-(1+s)^{-1}\Big]_0^t \quad (★) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t^2}+\log|1-t^2|\right) \\
&= \frac{b^2+1}{4}-\frac{1}{4}\log(b^2+1).(= ⑪)
\end{aligned}
$$

この答を b で微分すると $\sqrt{b^2+1}$ となるはずだが,

$$\frac{d}{db}⑪ = \frac{1}{4}\cdot 2b - \frac{1}{4}\cdot\frac{2b}{b^2+1} = \frac{b^3}{2b^2+2}$$

なので不合理である．また，与定積分から $b\to 0+0$ のとき答は 0 に収束しなければならない．$\lim_{b\to 0+0}⑪ = 1/4(>0)$ であることからも⑪ の不合理性が分かる．

これから誤答の修正をするが，膨大な計算を最初からしらみ潰しで行うことは大変である．普段の問題演習で行うのは良いが，試験ではそのような時間的余裕は期待できない．ここでは，残り時間が少ない場合の誤答修正について考えたい．

上記誤答は ⑨ 以前と ⑨ より後の二つに分かれる．まず，⑨ を b で微分しよう．そのとき，微分された関数が $\sqrt{b^2+1}$ であれば ⑨ より後に，そうでなければ ⑨ 以前に誤りがあると考えられる．[*10] $b=\tan\varphi$ より $db/d\varphi = 1/\cos^2\varphi$ なので，$d\varphi/db = \cos^2\varphi = 1/(b^2+1)$．よって，合成関数の微分から

$$\frac{d}{db}⑨ = \frac{\cos\varphi}{(1-\sin^2\varphi)^2}\cdot\frac{1}{b^2+1} = \sqrt{b^2+1}.$$

したがって，⑨ より後に誤りがあるので，この部分を ⑩ 以前と ⑩ より後に二分する．⑩ を b で微分して $\sqrt{b^2+1}$ になれば ⑩ より後に，そうでなれば ⑩ 以前に誤りがあることに

[*10] 「⑨に誤りがなくてもそれ以前に誤ったものがたまたま元に戻っている可能性もあるじゃないか！」という意見もあろうが，ここでは結果が題意と矛盾するほどの重大なエラーを修正することを念頭におく．

なる．$t=b/\sqrt{b^2+1}$ より $dt/db=(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}$. よって，合成関数の微分から

$$\begin{aligned}
\frac{d}{db}⑩ &= \frac{1}{4}\{(1-t)^{-2}+(1-t)^{-1}+(1+t)^{-1}+(1+t)^{-2}\}\cdot(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{4}\{(1+t)(1-t)\}^{-2}\{(1+t)^2+(1+t)^2(1-t)+(1+t)(1-t)^2+(1-t)^2\}\cdot(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{4}(1-t^2)^{-2}\cdot 4\cdot(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}\\
&= \sqrt{b^2+1}.
\end{aligned}$$

したがって，⑩ より後から ⑪ より前で誤りが生じたと考えられる．(★) 以降は次のように修正されるべきである．

$$\begin{aligned}
⑩ &= \frac{1}{4}\Big[(1-s)^{-1}-\log|1-s|+\log|1+s|-(1+s)^{-1}\Big]_0^t\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2t}{1-t^2}+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\\
&= \frac{1}{2}b\sqrt{b^2+1}+\frac{1}{2}\log(b+\sqrt{b^2+1})\ (=⑫)
\end{aligned}$$

この正答に対する検算は読者の演習に残しておく．

問題 7.6. ⑫ を b で微分して $\sqrt{b^2+1}$ になることを確かめよ．

例題 7.4 にはいろいろな別解が知られている．筆者が知る限りの三つの方法を挙げよう．

一つ目は**双曲線関数で置換する**ことである．双曲線関数とは指数関数で定められた次の関数のことを言う．

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

sinh, cosh, tanh はそれぞれ “ハイパボリック・サイン”，“ハイパボリック・コサイン”，“ハイパボリック・タンジェント” と読む．双曲線関数は三角関数に似た次の性質をもつ．

問題 7.7. 次の式を証明せよ．

(1) $(\sinh x)'=\cosh x$

(2) $(\cosh x)'=\sinh x$

(3) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(4) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

(5) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

(6)

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$$

〈別解 1〉$x=\sinh u$ とおく．sinh の定義より $x=0$ のとき $u=0$, $x=b$ のとき $e^u=b+\sqrt{b^2+1}$ から $u=\log(b+\sqrt{b^2+1})$. また，問題 7.7 (3) より $\sqrt{1+x^2}=\cosh u$, (1) より $dx/du=\cosh u$.

よって，

$$与式 = \int_0^{\log(b+\sqrt{b^2+1})} \cosh^2 u du.$$

ここで，(5) より $\cosh^2 u = (1+\cosh 2u)/2$ なので，(1) から

$$\int_0^{\log(b+\sqrt{b^2+1})} \cosh^2 u du = \int_0^{\log(b+\sqrt{b^2+1})} \frac{1+\cosh 2u}{2} du = \frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sinh 2u\right]_0^{\log(b+\sqrt{b^2+1})}.$$

$u = \log(b+\sqrt{b^2+1})$ のとき $\sinh u = b, \cosh u = \sqrt{b^2+1}$（(3) より）なので, (4) より $\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u = 2b\sqrt{b^2+1}$. ゆえに,

$$\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sinh 2u\right]_0^{\log(b+\sqrt{b^2+1})} = \frac{1}{2}b\sqrt{b^2+1}+\frac{1}{2}\log(b+\sqrt{b^2+1}).$$

これが求める積分値である．

二つ目は $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の微分と部分積分を応用する方法である．このトリックは高専の微分積分の授業でよく使われ，大学入試でもまれに出題される．[*11]

〈別解 2〉まず，$\log(x+\sqrt{x^2+1})$ を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\} = \frac{1+(x/\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \quad \cdots⑬$$

求める積分値を I とおく．$f'(x) = 1, g(x) = \sqrt{x^2+1}$ とすると，$f(x) = x, g'(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ なので，部分積分より

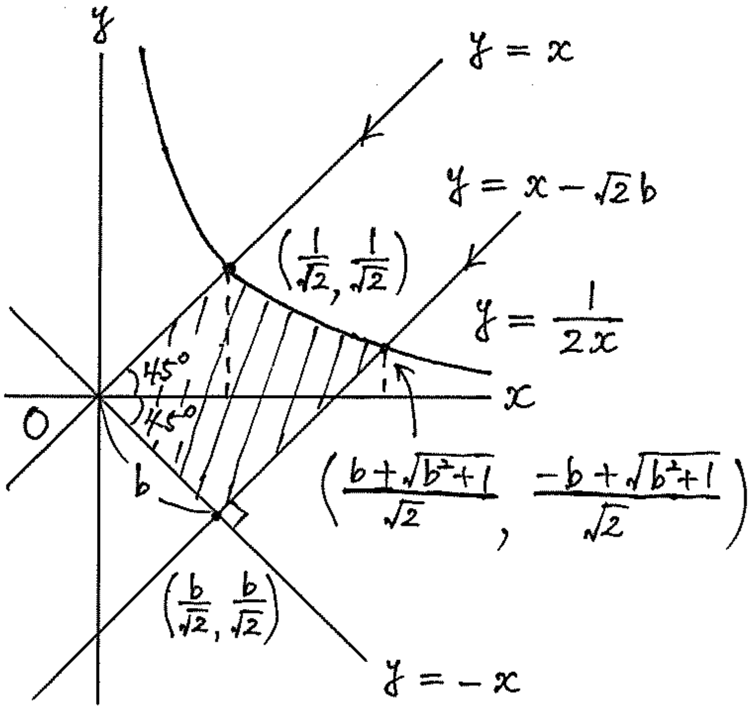
$$\begin{aligned}
I &= \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^b - \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= b\sqrt{b^2+1} - I + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad （x^2 = (x^2+1)-1 \text{ を用いた}） \\
&= b\sqrt{b^2+1} - I + \left[\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^b \quad （⑬ \text{ より}） \\
&= b\sqrt{b^2+1} - I + \log(b+\sqrt{b^2+1}).
\end{aligned}$$

よって，

$$I = \frac{1}{2}b\sqrt{b^2+1}+\frac{1}{2}\log(b+\sqrt{b^2+1}).$$

三つ目は回転移動を利用する方法である．$y = \sqrt{x^2+1}$ ($\cdots$⑭) は直角双曲線なので，原点を中心に時計回りに 45° だけ回転すると反比例のグラフになる．

[*11] 例えば，2002 年の京大・理系・前期など.



〈別解 3〉 xy 平面上の点 (x,y) を原点を中心に時計回りに 45° 回転した点を (s,t) とすると，$(x+yi)\{(1-i)/\sqrt{2}\} = s+ti$ （i は虚数単位）が成立する．この式から $s=(x+y)/\sqrt{2}$, $t=(-x+y)/\sqrt{2}$. これを整理すると $x=(s-t)/\sqrt{2}$, $y=(s+t)/\sqrt{2}$. この二式を ⑭ に代入すると，$st=1/2$ となる．また，x 軸，y 軸，直線 $x=b$ を時計回りに 45° だけ回転すると，それぞれ直線 $y=-x$, 直線 $y=x$, 直線 $y=x-\sqrt{2}b$ $(\cdots ⑮)$. よって，与えられた定積分はこれら三つの直線と曲線 $y=1/2x$ $(x>0)$ $(\cdots ⑭')$ で囲まれた領域の面積となる．⑭′ と ⑮ の交点の座標が $((b+\sqrt{b^2+1})/\sqrt{2}, (-b+\sqrt{b^2+1})/\sqrt{2})$ であることに注意すると，求める積分値は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{b+\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2x}\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{b^2}{2}\\
=\ & \frac{1}{2}[\log x]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{b+\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4}(2b^2+1-2b\sqrt{b^2+1}) + \frac{1}{4} + \frac{b^2}{2}\\
=\ & \frac{1}{2}b\sqrt{b^2+1} + \frac{1}{2}\log(b+\sqrt{b^2+1}).
\end{aligned}
$$

追加で問題を用意したので試されたい．

問題 7.8. c を 1 より大きい実数定数とする．次の定積分を求めよ．

$$\int_1^c \sqrt{x^2-1}dx.$$

8 包含関係は面積の大小に対応する

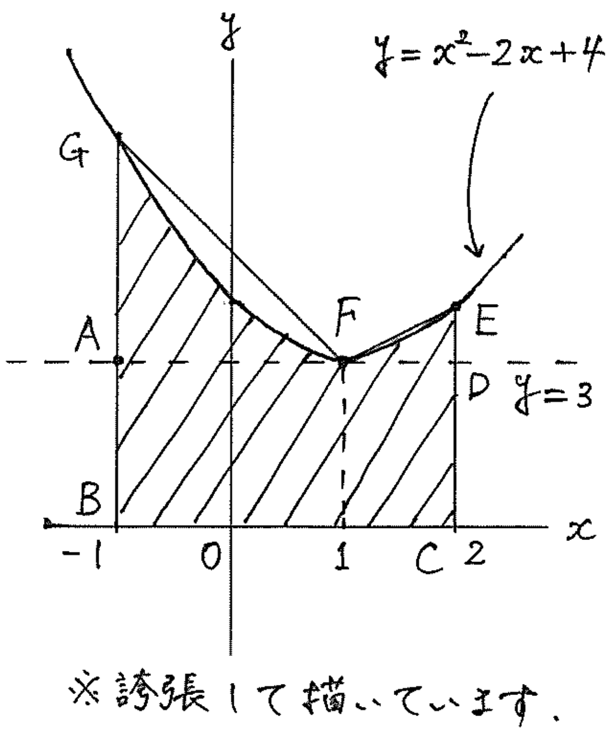
平面上の円の面積はそれに内接［外接］する三角形の面積より大きい［小さい］．このように，ある平面上の図形 A, B に対して A が B を含む［に含まれる］ならば A の面積は B のそれ以上［以下］となる．このことも確実性こそ欠けるものの意外と検算に役立つ．

8.1 基本

次の例題についてベタな誤答を二つ紹介しよう．

例題 8.1. 放物線 $y = x^2 - 2x + 4$, x 軸，直線 $x = -1$, および直線 $x = 2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

> $x^2 - 2x + 4 \geqq (x-1)^2 + 3 \geqq 3$ (⋯①) より，放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ は x 軸より上側にある．よって，求める面積は
>
> $$\int_{-1}^{2} x^2 - 2x + 4\, dx (= ②) = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x^2\right]_{-1}^{2} (★) = 6.$$



ここで，題意の領域を図示すると上図の斜線部分のようになる．四点 $A(-1,3)$, $B(-1,0)$, $C(2,0)$, $D(2,3)$ を頂点とする正方形 $ABCD$ はこの領域に含まれる．$ABCD$ の面積は 9 な

ので **答は 9 より大きい**．また，① から，

$$②\geqq\int_{-1}^{2}3\,dx=9$$

となるので**② から答の間でミスが生じたのでは**ないかと考えられる．② 以降は次の通りに修正される：

$$②=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{3}\cdot\{2^3-(-1)^3\}-\{2^2-(-1)^2\}+4\cdot\{2-(-1)\}=\frac{1}{3}\cdot 9-3+4\cdot 3=12.$$

一方でこのようなミスも考えられる．

$$②=\left[x^3-x^2+4x\right]_{-1}^{2}\ (\bigstar)=18$$

放物線 $y=x^2-2x+4$ 上の三点 $E(2,4)$, $F(1,3)$, $G(-1,7)$ に対して，二線分 EF, FG はいずれも放物線 $y=x^2-2x+4$ の上側にある．もしこの答が正しいならば，**凹五角形 $BCEFG$ は題意の領域を含む**から答の 18 は $BCEFG$ の面積より小さいことになる．しかし，$BCEFG$ の面積は

$$(3+7)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+(4+3)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{2}=13.5$$

なので不合理である．

不定積分を求める際に係数を誤る方は意外と多いようである．しかし，簡単に見える問題でも油断せずにしっかりと検算をしてほしい．例題 8.1 のおまけの問題を演習に残しておく．

問題 8.1. 放物線 $y=x^2-2x+4$ の $-1\leqq x\leqq 2$ の部分に点 P をとる．凹五角形 $BCEPG$ の面積の最小値とそのときの点 P の座標を求めよ．

8.2 応用

面積や体積の問題も指数や対数などが数値に混ざると計算がややこしくなりがちで，答があっていなかった際の答案修正も面倒である．しかし，**背理法などの基本を活用すればある程度の誤りを弾くことはできる**.

例題 8.2. 点 $(0,1)$ から曲線 $C: y=\log 2x$ に引いた接線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C, 接線 l, x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（2004 年，岩手大）

積分される項の数が多いことによる誤答例を紹介する．このようなミスも多い．

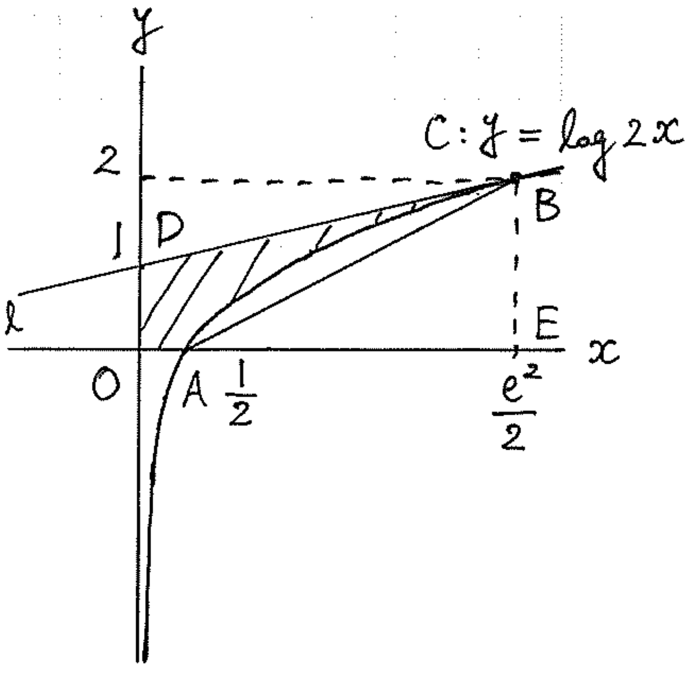
(1) $\log(2x) = \log x + \log 2$ に注意する．題意の接点の座標を $(t, \log t + \log 2)$ とすると，$(\log x + \log 2)' = 1/x$ なので，接線 l の方程式は

$$y = \frac{1}{t}x + \log t + \log 2 - 1.$$

これが点 $(0, 1)$ を通るので，

$$1 = \log t + \log 2 - 1 \Longleftrightarrow \log 2t = 2 \Longleftrightarrow t = \frac{e^2}{2}.$$

よって，l の方程式は $y = 2e^{-2}x + 1$.



(2) 上図より求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{-2}x + 1\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} (2e^{-2}x + 1) - (\log x + \log 2)\, dx \ (= ③) \\ = \ & \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{2} + \Big[2e^{-2}x^2 - x\log x + x + (1 - \log 2)x\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \ (= ④)\ (★) \\ = \ & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2}.\ (= ⑤) \end{aligned}$$

「(2) の修正より (1) の確認が先ではないか」という方のために演習問題を残しておく．

問題 8.2. 直線 $y = 2e^{-2}x + 1$ は曲線 C と点 $(e^2/2, 2)$ で接することを示せ.

さて，$(\log 2x)'' = -x^{-2} < 0$ より曲線 C は上に凸であるから，曲線 C 上の二点 $A(1/2, 0)$, $B(e^2/2, 2)$ に対して線分 AB は曲線 C の下側にある．よって，点 $(0, 1)$ を D とするとき，四角形 $OABD$ は題意の領域を含んでいる．点 $(e^2/2, 0)$ を E とすると，

$$OABD = OEBD - \triangle AEB = (1+2) \cdot \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 - 1}{2} \cdot 2 = \frac{e^2 + 2}{4}.$$

ゆえに，前述の答が正しいなら

$$\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2} < \frac{e^2 + 2}{4}$$

が成立するはずである．この不等式は $4 > e^2 - e^{-2}$ と同値になる．しかし，$2.7 < e < 2.8$ より $e^2 - e^{-2} > 2.7^2 - 1 = 6.29$ となり矛盾が生まれる.

前述の誤答の原因は**積分される項が多い**ことにあった．誤りを見つけて答案を修正することは大事だが，**試験時の状況によっては別解を考えた方が良いことも**ある．ここでは，積分される項が少ない別解を先に紹介しよう.

〈(2) の別解〉 題意の領域は台形 $OEBD$ から曲線 C の弧 AB と二線分 AE, EB で囲まれた図形を除いたものだから，求める面積は

$$\begin{aligned}
(OD + BE) \cdot OE \cdot \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \log 2x dx &= (1+2) \cdot \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{2} - \int_1^{e^2} \log t \, dt \\
&= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{2}\left[t \log t - t\right]_1^{e^2} \\
&= \frac{e^2 - 2}{4}.
\end{aligned}$$

ただし，$t = 2x$ とした.

さて，(1) の答が正しいことは問題 8.2 により確認された．よって，誤りがあるのは (2) の定積分の計算以降ということになる．⑤ の値がずれていることは確認されたので，③と④が $(e^2 + 2)/4$ より小さいかそれぞれ確認する．誤答例で示した通り正値一次関数の定積分の計算は台形の面積公式を使うと計算が楽である.

③ は第二項の定積分の計算を次のように保留しておく：

$$\begin{aligned}
③ &= \frac{e^{-2} + 2}{4} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} e^{-2} \cdot (2x) + 1 - \log(2x) \, dx \\
&= \frac{e^{-2} + 2}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{e^2} e^{-2}t - \log t + 1 \, dt.
\end{aligned}$$

前の行で $t = 2x$ とした．ここで，曲線 C のときと同様に次のことを確かめられたい.

問題 8.3. (1) $s=\log t\ (t>0)$ のグラフは上に凸である.
(2) $\log t \geqq \{2/(e^2-1)\}(t-1)$ を示せ.

(2) の結果より

$$\frac{e^{-2}+2}{4}+\frac{1}{2}\int_1^{e^2} e^{-2}t-\log t+1\,dt<\frac{e^{-2}+2}{4}+\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\left(e^{-2}-\frac{2}{e^2-1}\right)t+\frac{2}{e^2-1}+1\ (=⑥).$$

$g(t)=\{e^{-2}-2/(e^2-1)\}t+2/(e^2-1)$ とする. $e^{-2}-2/(e^2-1)<-(e^2+1)/\{e^2(e^2-1)\}<0$ でかつ $g(e^2)=0$ なので $s=g(t)$ は右下りの一次関数である. よって,

$$⑥=\frac{e^{-2}+2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+e^{-2})(e^2-1)=\frac{e^2+2}{4}.$$

④ の確認と修正は演習問題に残しておく.

問題 8.4. ④ は $(e^2+2)/4$ より小さくならないことを示し, ④ の修正例を示せ.

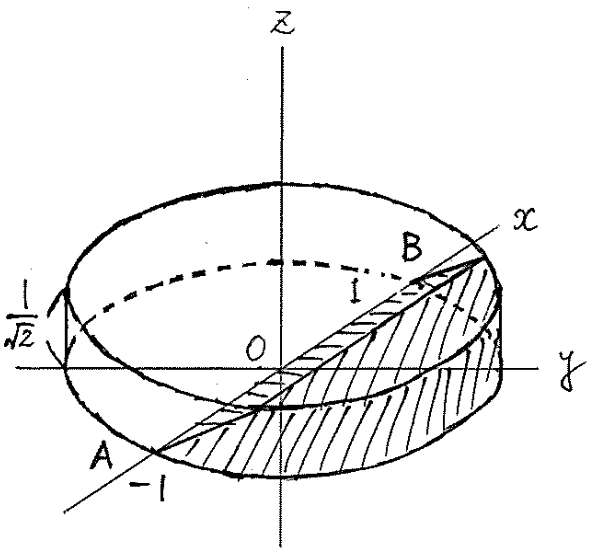
こうして, 正答は $(e^2-2)/4$ であることが分かる. これが $(e^2+2)/4$ より小さいことは自明である.

これまで平面上の図形について述べてきたが, 本節の技術は空間上の立体にも応用される.

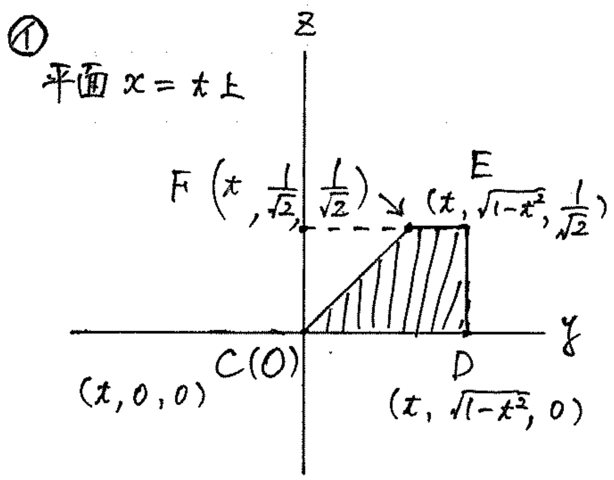
例題 8.3. 半径 1 の円を底面とする高さ $1/\sqrt{2}$ の直円柱がある. 底面の円の中心を O とし, 直径を 1 つ取り AB とおく. AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき, 体積の小さい方の部分を V とする. V の体積を求めよ.

(2013 年, 東北大・理系・前期, 改題)

解法はほぼ正しいがあと一歩のところで誤った例を挙げる.

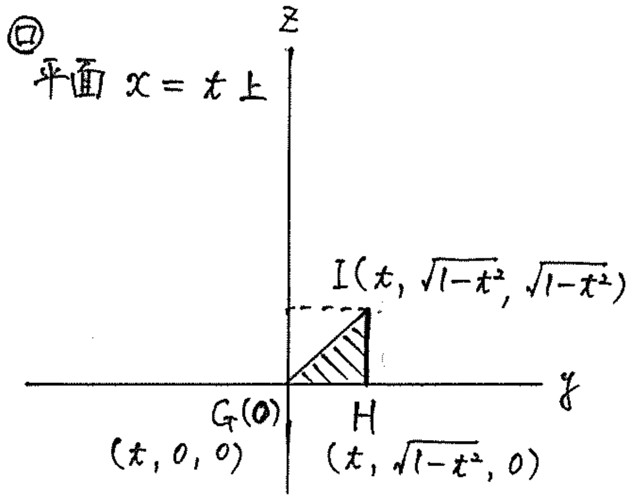


xyz 空間の原点が題意の点 O と重なり，題意の二点 A, B がそれぞれ $(-1,0,0)$, $(1,0,0)$ となるようにし，かつ直径 AB を含む直円柱の底面が xy 平面と重なるようにする．さて，平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で V を切ったときの断面積を $S(t)$ とする．



① $0 \leqq t \leqq 1/\sqrt{2}$ のとき，切り口は四点 $C(t,0,0)$, $D(t, \sqrt{1-t^2}, 0)$, $E(t, \sqrt{1-t^2}, 1/\sqrt{2})$, $F(t, \sqrt{1-t^2}-(1/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2})$ を頂点とする台形となる．よって，

$$S(t) = \left\{ \sqrt{1-t^2} + \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{4}.$$

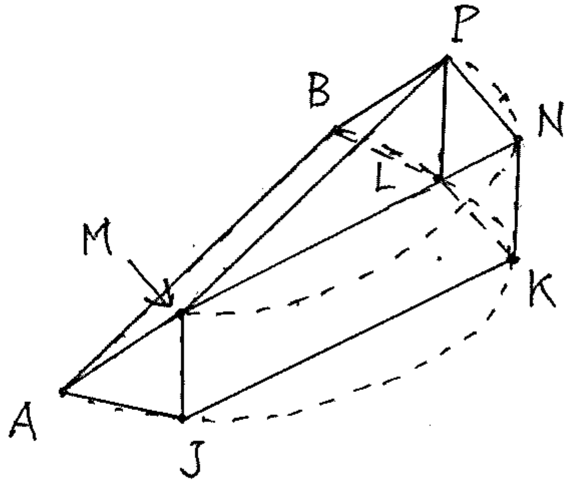


㋺ $1/\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$ のとき，切り口は $G(t,0,0)$, $H(t, \sqrt{1-t^2},0)$, $I(t, \sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2})$ を頂点とする直角二等辺三角形である．よって，

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{1-t^2})^2 = \frac{1}{2}(1-t^2).$$

㋑ ㋺ より V の体積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{2}(1-t^2)\,dt \quad (\bigstar) \quad (= ⑦) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \quad (t = \sin\theta \text{ とした}) \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2\theta\,d\theta - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{3} - \frac{5}{24}\sqrt{2} \quad (\text{二倍角の公式}) \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{3} - \frac{5}{24}\sqrt{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{16}\pi + \frac{1}{3} - \frac{5}{24}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$



ここで，$J(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $K(0,1,0)$, $L(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $M(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $N(0,1,1/\sqrt{2})$, $P(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ とすると，立体 V はこれら六点と二点 A, B を併せた八点を頂点とする七面体を含んでいる．

問題 8.5. 七面体 $MNPAJKLB$ の体積は $(2/3)-(\sqrt{2}/12)$ であることを示せ．

$(2/3)-(\sqrt{2}/12) > 0.54$ より，V の体積は 0.54 より大きいはず．しかし，(★) は間違いであることが次の問題から分かるだろう．

問題 8.6. ⑦ は 0.54 より小さいことを示せ．

こうして**平面 $x=0$ に関する対称性を考慮して ⑦ を二倍するべきだった**ことに気づけば正答が $(\sqrt{2}/8)\pi+(2/3)-(5\sqrt{2})/12$ であることも分かるだろう．しかし，試験場にて答案の修正が困難である場合には次のような別解を考えることも一手である．

〈別解〉 平面 $y=1/\sqrt{2}$ で V を二分する．このとき，点 A を含まない柱状部分は四分円の弧 JL と弦 JL で囲まれた部分を底面にもつので，その体積は

$$\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

一方，点 A を含む方の部分を平面 $y=s$ $(0 \leqq s \leqq 1/\sqrt{2})$ で切ると，切り口は四点 $Q(-\sqrt{1-s^2}, s, 0)$, $R(-\sqrt{1-s^2}, s, s)$, $S(\sqrt{1-s^2}, s, s)$, $T(\sqrt{1-s^2}, s, 0)$ を頂点とする長方形で，その面積は $2s\sqrt{1-s^2}$. よって，点 A を含む方の部分の体積は

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2s\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{u}\,du=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

ここに，$u = 1 - s^2$ とした．したがって，求める体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\sqrt{2}.$$

問題を解いて解答を見ては一喜一憂している学生の方は多いであろうが，**問題を解くことに満足せず改造して再挑戦する習慣も**身に付けてほしい．例題 8.3 ならば次の通り改造されよう．

問題 8.7. 半径 1 の円 O を底面にもつ高さ $\sqrt{3}/2$ の円柱がある．底面の直径 AB を通りかつ底面と $\pi/3$ の角をなすような平面で円柱を切ったとき，体積の小さい方の立体の体積を求めよ．

最後に類題を一つ出しておく．

問題 8.8. 次の式で与えられる底面の半径が 2 高さが 1 の円柱 C を考える．

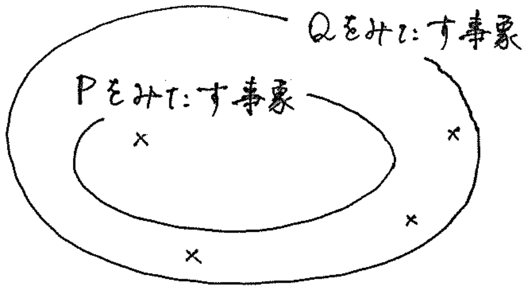
$$C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqq 4, \quad 0 \leqq z \leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面のうち，点 $(0,2,1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点 $(0,2,0)$ を含む方の体積を求めよ．

（2008 年，京大・理系・前期）

9　必要・十分条件は確率や場合の数の大小に対応する

さいころを 1 回振って 1 の目が出ることを P, 奇数の目がでることを Q としよう．このとき，P は Q であるための十分条件と言った．また，P, Q が起こる確率はそれぞれ 1/6, 1/2 であり，$1/6 < 1/2$ である．



一般に，二つの条件 P, Q に対して，$P \Longrightarrow Q$ であるとき，

$$P\text{ が起こる確率［場合の数］} \leqq Q\text{ が起こる確率［場合の数］}$$

である．もちろん，$P \Longleftarrow Q$ ならば先の不等号の向きは反対になるし，$P \Longleftrightarrow Q$ ならば等号が成立する．このことを検算に応用してみよう．

9.1 基本

例題 9.1. 一辺 1 の正六角形の頂点の一つを A とする．動点 P は最初 A の上にあり，さいころを振って出た目の数だけ正六角形上を反時計回りに動くとする．さいころを 3 回振って点 P がちょうど一周する方法は何通りか.

（2007 年，センター試験）

順列と組合せを混同した誤答はビギナーによく見られる．

さいころを 3 回振って出る目を順に x, y, z とする．題意より $x+y+z=6$ ($\cdots$①) である．これは $X=x-1, Y=y-1, Z=z-1$ とすると，$X+Y+Z=3$ と同じことである．よって，求める場合の数は三つの O と二つの I を一列に並べる場合の数に等しい（I で仕切られた O の数を左から X, Y, Z の値と見なせばよい）ので，答は

$${}_5P_2\ (\bigstar) = 20\ (\text{通り}).$$

途中まで正しいだけに過程を問う形式の試験であるか否かで結果が大きく分かれる誤答と言えよう．

① $\Longleftrightarrow x+y=6-z$ でかつ x, y, z は 1 から 6 までの整数なので，$2 \leqq x+y \leqq 5$ ($\cdots$②) が言える．したがって，**題意の条件が成立するならば，1 回目と 2 回目の目の和の合計は 2 以上 5 以下**である．$2 \leqq x+y \leqq 5$ を満たす (x,y) は次の表から 10 通りであることが分かる．

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	O	O	O	O	X	X
2	O	O	O	X	X	X
3	O	O	X	X	X	X
4	O	X	X	X	X	X
5	X	X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X	X

よって，答は 10 通り以下でなければならない.

逆に ② が成立するならば，$z=6-(x+y)$ とおくと $x+y+z=6$ かつ $z=1,2,3,4$ なので題意の条件も成り立つ．したがって，② は題意の条件が成立するための必要十分条件であるから，答は 10 通りとなる．つまり，前述の検算は別解も兼ねていることになる．

少し補足するが，センター試験や難関私大入試などは分量が多めでかつ時間が短めに設定されており計算ミスが発生しやすい．**うろ覚えの順列や組合せの公式を使う前に樹形図や表を用いて解く**ことも考えてほしい．

問題 9.1. 例題 9.1 を樹形図を用いて解け．

例題 9.2. 4 人で一度だけじゃんけんをする．勝ち組が 2 人になる確率を求めよ．

（新潟大，改題）

> プレーヤーを A, B, C, D とする．どの二人が勝ち組になるかで ${}_4C_2 = 6$ 通りの場合がある．また，それぞれの組に対して手の出し方は ${}_4P_2 = 12$ (★) 通りある．すべての手の出し方は $3^4 = 81$ 通りあるので，求める確率は $(6\cdot 12)/81 = 8/9$.

こちらも概ね正しいだけに試験方式次第で結果がかなり変わってしまう誤答である．さて，題意の条件が満たされるならばじゃんけんはあいこにならない．よって，8/9 **が正答ならばあいこにならない確率は** 8/9 **より大きい**ことになる．そこで，あいこにならない手の出し方を考えてみる．

あいこにならないことは**プレーヤー全員の出す手の種類がちょうど二つ**であることと同義であることに注意しよう．このとき，例えば出る手がグーとチョキのみであるとしたら，手の出し方は $2^4 - 2 = 14$ 通りである．他にもチョキとパー，パーとグーであいこにならないことがありうる．よって，あいこにならない確率は $(14/81)\cdot 3 = 14/27$. これは $8/9(= 24/27)$ よち小さく矛盾している．

勝ち組の組合せを辞書式に考えても，A と B, A と C, A と D, B と C, B と D, C と D の 6 通りである．よって，各勝ち組に対するプレーヤー全体の手の出し方のカウントを誤ったことが考えられる．A と B が勝ち組とすると，プレーヤー全体の手の出し方は次の表に示す通りになる．

A	B	C	D
グー	グー	チョキ	チョキ
チョキ	チョキ	パー	パー
パー	パー	グー	グー

よって，正答は $(3\cdot 6)/3^4 = 2/9$.

前述の誤答のように**題意を満たす場合の数や確率をダブルカウントした誤答**はかなり多い．事象の数が多くなりそうにないならば，安易に公式に頼らず樹形図や表を活用して正確に数える習慣を身に付けてほしい．

追加の問題をいくつか挙げておく．とくに次の問題では，あいこにならない場合は，出す手を真逆に入れ替えれば勝ち組と負け組の人数が反転する（例えば，A, B, C, D がそれぞれグー，パー，パー，パーを出すとすると勝ち組は A のみの 1 人．しかし，グーとパー

の分布が入れ替わって，A, B, C, D がそれぞれパー，グー，グー，グーを出すとき，B, C, D の 3 人が勝ち組となる．）ので，(1) と (2) の確率は同じにならなければならない．

問題 9.2. (1) 例題 9.2 で勝ち組が 1 人となる確率を求めよ．
(2) 例題 9.2 で勝ち組が 3 人となる確率を求めよ．

プレーヤーの数が変わっても，あいこにならないような手の出方は例題 9.2 と同様に数えられる．

問題 9.3. (1) n ($n \geqq 3$) 人で一度だけじゃんけんをするとき，あいこにならない確率を求めよ．
(2) $\lim_{m\to\infty} m/3^m = 0$ を証明せよ．

9.2 応用

前節では確率や場合の数を誤って多めにカウントした誤答を紹介したが，今度は誤って少なめにカウントした場合を考えよう．

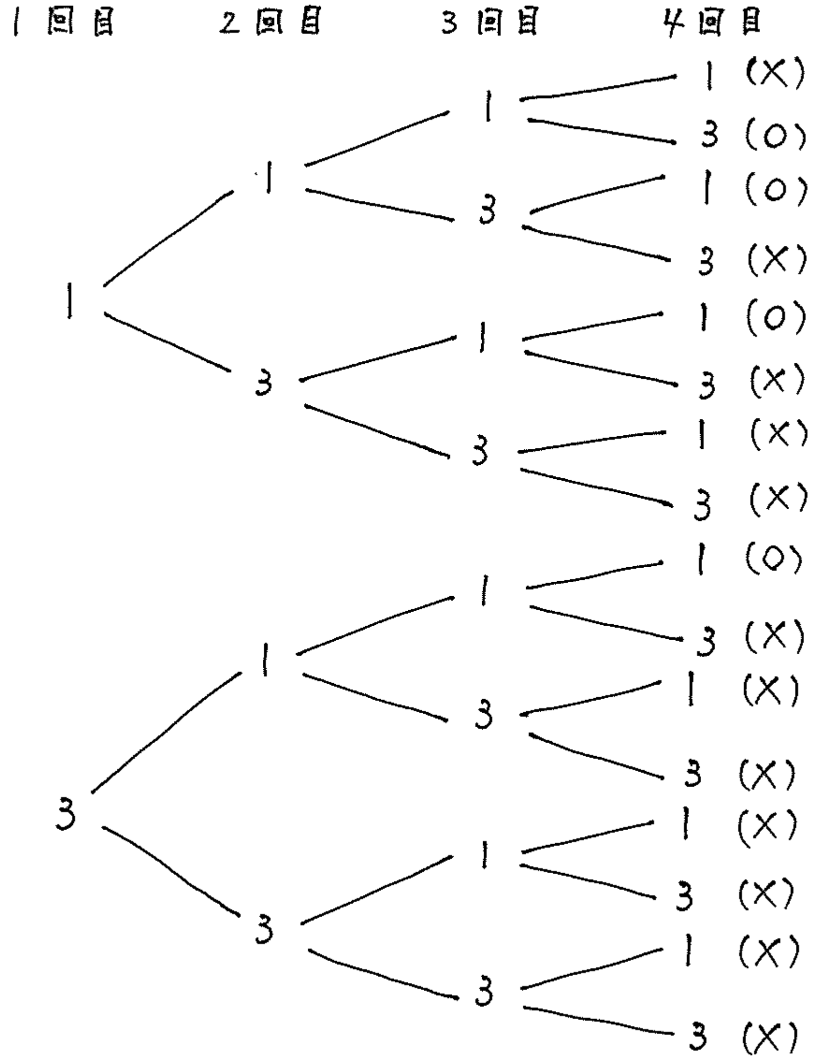
例題 9.3. さいころを投げたとき，3 の目が出れば得点は -3, その他の目が出れば得点はその目の数とする．さいころを 4 回投げたとき，得点の和が 0 となる確率を求めよ．

（2000 年，阪市大・文系・前期）

> ㋑ 3 の目が 1 回だけのとき，他の目は全部 1 なので，題意の確率は $1/6^4$ (★).
> ㋺ 3 の目が 2 回だけのとき，他の目の組合せは 1 と 5，2 と 4 の 2 組だけなので，題意の確率は $2/6^4$ (★).
> 3 の目が 3 回以上でると得点の和は 0 にならない．また，㋑と㋺の事象は互いに排反なので，求める確率は $1/6^4 + 2/6^4 = 1/432$.

何回目に何の目が出るかを無視した誤答であり，よくあるパターンである．ここでは，**題意の条件を厳しくして**正答がいくら以上かを考えよう．しかし，さいころを 4 回振ったときの目の出方は全部で $6^4 = 1296$ 通りであり，すべての場合を考察することは困難であろう．*12 そこで，1 または 3 の目が出る場合のみ考えてはどうだろうか．このとき，目の出方はせいぜい $2^4 = 16$ 通りであるから，樹形図で次の通り簡単に検証できよう．

*12 ただし，パソコンの表計算ソフトなどを利用すれば mod や if を用いてこの考察は容易である．知識のある方は試されたい．



上図の通り，1 または 3 の目が出る場合でかつ題意を満たすような目の出方は 4 通りなので，**求める確率は** $4/6^4 = 1/324$ **以上**でなければならない．よって，先の 1/432 が誤答であることが分かる．しかも，誤答の㋑の通り，3 の目が 1 回のみ出るときは他の目は 1 であるから，㋑で求めた確率はちょうど 1/324 であることまで分かる．

さて，㋑部分の誤答 $1/6^4(=1/1296)$ と㋑部分の正答 $1/324(=4/1296)$ を比較すると，何回目で 3 の目が出るかを全然考慮しなかったことが失敗の原因であり，これが㋺部分の誤答の原因にもなっていることが分かる．

㋺以降の正答は次の通り：㋺ 3 の目が 2 回だけのとき，他の目の組合せは 1 と 5，2 と 4 の 2 組だけである．3 以外の目が 1 と 5 のとき，計 4 回の目の出方は 4 人掛け長椅子に 2 人が座る場合の数と同じだから $4 \cdot 3 = 12$ 通り．3 以外の目が 2 と 4 のときも同様に 12 通り．よって，題意の確率は $12 \cdot 2/6^4$．㋑と㋺の事象は互いに排反なので，求める確率は

$(4+12\cdot 2)/6^4 = 7/324$.

例題 9.3 の続きは阪市大の問題では次のように続いていた．余力のある方は試されよ．

問題 9.4. 例題 9.3 のとき，得点の和が正になる確率を求めよ．

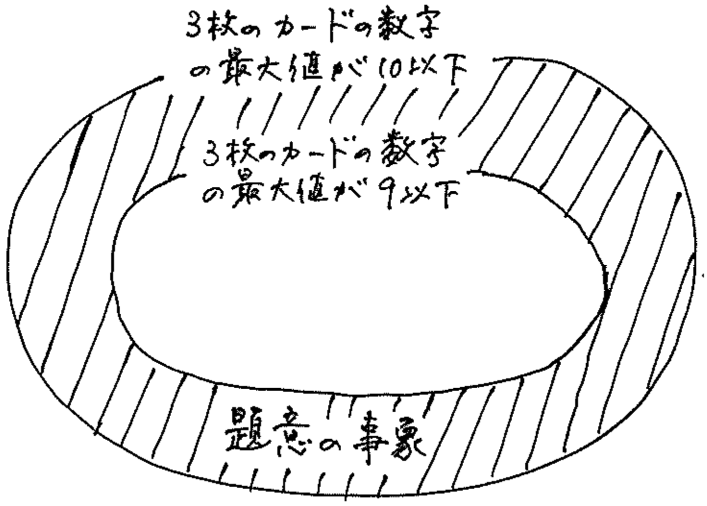
ランダムに選ばれた複数の数字の最大・最小に関する確率や場合の数の問題は難関校でたまに出題される．

例題 9.4. ジョーカーを除く計 52 枚のトランプがある．この中から 3 枚同時に引き一列に並べる．A（エース），J（ジャック），Q（クイーン），K（キング）はそれぞれ 1, 11, 12, 13 と見なすとき，並べられた 3 枚のカードの数字の最大値が 10 になる場合は何通りか.

数字が 10 以下のカードは全部で 40 枚だから，求める場合の数は ${}_{40}P_3 = 40\cdot 39\cdot 38 = 59280$ 通り．(★)

二段階に分けて考える．まず，題意の条件が成り立つならば，少なくとも 10 のカードが一枚引かれる (⋯Ⓐ). ここで，Ⓐの余事象（真反対の事象）は 10 のカードが一枚も引かれない (⋯Ⓑ) ことである．Ⓑ を満たすカードの並べ方は，10 以外のカードが 48 枚あることから $48\cdot 47\cdot 46 = 103776$ 通りである．よって，Ⓐ の並べ方は $52\cdot 51\cdot 50 - 48\cdot 47\cdot 46 = 132600 - 103776 = 28824$ 通り．ゆえに，答は 28824 通り以下でなければならず，59280 通りは間違いである．

前述の誤答が正しくないことが分かったものの，数字の規模が大きすぎてここから直接に修正することは少し手間がかかる．そこで，並べられた 3 枚のカードの数字の**最大値が 10 ではなく 2 である場合を**考えてはどうだろうか．3 枚のカードの数字の最大値が 2 の場合の数は，前述の誤答の論理に従うと $8\cdot 7\cdot 6 = 336$ 通りであることになる．しかし，この数え方は**カードの数字が全て 1 の場合も含めて**しまっている．カードの数字が全て 1 の場合は $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ 通りあるので，正しくは $8\cdot 7\cdot 6 - 4\cdot 3\cdot 2 = 312$ 通りである．この論理をもとの場合に引き戻せば正解が得られる：題意の事象は**引いたカードが全て 10 以下である場合から引いたカードが全て 9 以下である場合を除いた**事象である．よって，答は $40\cdot 39\cdot 38 - 36\cdot 35\cdot 34 = 16440$ 通り．



左図の関係に
注意しよう.

数字の規模が大きすぎるために問題が難しいと感じたなら，このように数字の規模を小さくして問題を易しくする工夫をしてほしい．また，前段の修正方法で納得がいかない方は次の方法を試みられたい．次の問題の (1) から (3) の事象は互いに排反であるから，合計すると例題 9.4 の正解に等しくなるはずである．

問題 9.5. 例題 9.4 に関して次の問いに答えよ．
(1) 引いたカードが 3 枚とも 10 のカードである場合の数を求めよ．
(2) 引いたカードが 2 枚だけ 10 のカードでかつ残り 1 枚が 9 以下のカードである場合の数を求めよ．
(3) 引いたカードが 1 枚だけ 10 のカードでかつ残り 2 枚が 9 以下のカードである場合の数を求めよ．

10 対称性に注意せよ

「$x^2-1(=P)$ を因数分解せよ」という問題の答が $(x+1)(x-2)(=Q)$ となっていたらおかしいと思うのが普通である．実際，x を $-x$ に取り替えても，$P=(-x)^2-1=x^2-1$ より同じ式なのに，$Q=(-x+1)(-x-2)=(x-1)(x+2)$ と別の式になっている．このように，問題で定められた式や領域，図形などがある対称性をもつ場合は答にもその対称性が表れるのが自然である．このことを利用すればいくらかの誤りを弾くことができる．

10.1 基本

例題 10.1. 次の式を因数分解せよ．

$$(1)\quad (a^2-1)(b^2-1)-4ab \qquad\qquad (2)\quad (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

係数や符号の間違いはありがちだが，そのような間違いが一行でもあると対称性が崩れてしまう．

(1)

$$\begin{aligned}
\text{与式}\ (=①) &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 - 4ab\ (=②)\\
&= a^2b^2 - 2ab + 1 - (a^2 + 2ab + b^2)\ (=③)\\
&= (ab-1)^2 - (a+2b)^2\ (\bigstar)\ (=④)\\
&= (ab+a+2b-1)(ab-a-2b-1)\ (=⑤)
\end{aligned}$$

① にて a と b を入れ替えても，

$$(b^2-1)(a^2-1) - 4ba = (a^2-1)(b^2-1) - 4ab$$

となり式全体は同じものである．しかし，⑤ にて a と b を入れ替えると，

$$(ba+b+2a-1)(ba-b-2a-1) = (ab+2a+b-1)(ab-2a-b-1)$$

となり ⑤ とは異なる式になる．これは ⑤ が誤答であることを示している．同じ検証を ②, ③, ④ について行うと，それぞれ

$$b^2a^2 - b^2 - a^2 + 1 - 4ba = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 - 4ab = ②,$$

$$b^2a^2 - 2ba + 1 - (b^2 + 2ba + a^2) = a^2b^2 - 2ab + 1 - (a^2 + 2ab + b^2) = ③,$$

$$(ba-1)^2 - (b+2a)^2 = (ab-1)^2 - (2a+b)^2 \neq ④$$

となる．よって，④ でミスが生じたことが分かった．④ 以降は次の通り修正されるべきである．

$$③ = (ab-1)^2 - (a+b)^2 = (ab+a+b-1)(ab-a-b-1)\ (=⑤')$$

⑤′ にて a と b を交換しても

$$(ba+b+a-1)(ba-b-a-1) = (ab+a+b-1)(ab-a-b-1) = ⑤'$$

となり対称性は保たれる．このように，異なる文字を入れ替えても全体が変わらない多項式のことを**対称式**といった．**対称式は因数分解しても対称式**である．文字式のままの検証が嫌いな方は次のような方法で検証すると良いだろう．

問題 10.1. $a = 2$ かつ $b = 3$ のとき，① 〜 ⑤ の値をそれぞれ求めよ．

文字が二つから三つに増えても同様に検証できる．次の (2) の誤答例でやってみよう．

(2)

$$\begin{aligned}
\text{与式}\ (=⑥) &= \{(x+y+z)-x\}\{(x+y+z)^2 + x(x+y+z) + x^2\} - (y^3+z^3)\ (=⑦)\\
&= (y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\
&\qquad +x^2+xy+zx-x^2-y^2+yz-z^2)\ (\bigstar)\ (=⑧)\\
&= (y+z)(x^2+3xy+3yz+3zx)\ (=⑨)
\end{aligned}$$

x, y, z をそれぞれ y, z, x に置き換えると，⑥ では

$$(y+z+x)^3-y^3-z^3-x^3=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=⑥$$

となるが，⑨ では

$$(z+x)(y^2+3yz+3zx+3xy)=(x+z)(y^2+3xy+3yz+3zx)\neq ⑨$$

となる．よって，⑨ は誤答である．

さて，⑦ にて同様の置換をすると，

$$\begin{aligned} & (y+z+x)-y\}\{(y+z+x)^2+y(y+z+x)+y^2\}-(z^3+x^3) \\ = \ & (y+z+x)^3-y^3-z^3-x^3 \\ = \ & ⑥ \end{aligned}$$

となり異常は見られない．よって，⑧ があやしいことになる．⑧ 以後は次のように改められる．

$$\begin{aligned} ⑦ &= (y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\ &\qquad +x^2+xy+zx+x^2-y^2+yz-z^2) \\ &= 3(y+z)(x^2+xy+yz+zx) \\ &= 3(x+y)(y+z)(z+x) \ (=⑧') \end{aligned}$$

⑧′ にて x, y, z をそれぞれ y, z, x に置換しても

$$3(y+z)(z+x)(x+y)=⑧$$

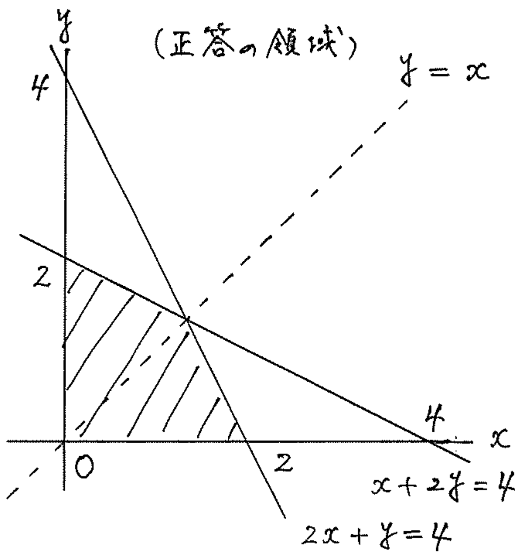
となり変わらない．問題 10.1 のような検証が良い方は，例えば次のようにしてはいかがか.

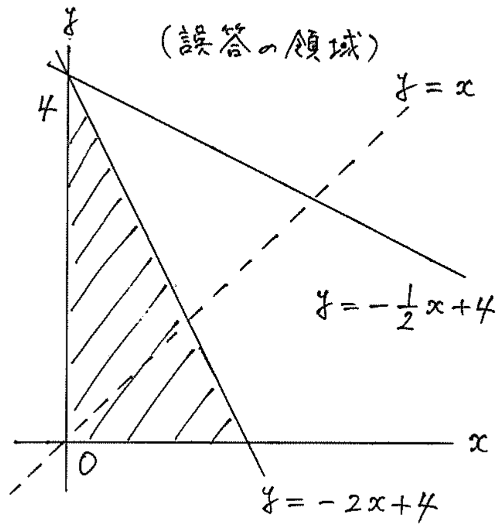
問題 10.2. $x=2, y=1$ かつ $z=0$ のとき ⑥ ～ ⑨ の値を求めよ．

例題 10.2. 不等式 $x+2y\leqq 4,\ 2x+y\leqq 4,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の領域における x^2+y^2 の最大値とそのときの (x,y) を求めよ．

（豊橋技大，改題）

誤答の紹介の前に題意の領域について次のことを確認しておく：題意の領域を示す各不等式にて x と y を入れ替えると，順に $y+2x\leqq 4,\ 2y+x\leqq 4,\ y\geqq 0,\ x\geqq 0$ であるが，これらを整理すると題意の領域と同等である．したがって，**題意の領域は直線 $y=x$ について対称**でなければならない.





$x+2y \leqq 4$ $(\cdots$⑩$)$ $\Longleftrightarrow y \leqq -(1/2)x+4$ $(\cdots$⑩$')$ (★), $2x+y \leqq 4$ $(\cdots$⑪$)$ $\Longleftrightarrow y \leqq -2x+4$ $(\cdots$⑪$')$ より題意の領域は上図の通り ⑪$'$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ と同等である．よって，$(x,y) = (0,4)$ のとき求める最大値は 16 である．

先の図に示した領域が直線 $y = x$ について対称でないことは明らかであるから，この答は間違いである．さて，原因を探るために最大値をとる点の $(x,y) = (0,4)$ を⑩, ⑩$'$, ⑪, ⑪$'$ に代入する．このとき，⑩ のみ $0+2\cdot 4 \leqq 4$ と不合理となる．

問題 10.3. ⑩$'$, ⑪, ⑪$'$ での不等号成立を確認せよ．

よって，⑩ から ⑩$'$ への変形にてミスが発生したことが分かる．⑩ は $y \leqq -(1/2)x+2$ に同値なので，本当の題意の領域は右図に示す通りとなる．x^2+y^2 を最大にする (x,y) の候補は $(2,0)$, $(4/3,4/3)$, $(0,2)$ のいずれかであるが，このとき x^2+y^2 はそれぞれ $4, 32/9, 4$ となる．よって，$(x,y) = (2,0)$ または $(0,2)$ のとき求める最大値は 4 となる．

与えられた式や領域が何らかの対称性をもっているにも関わらず，答がその対称性を失っていたときは計算ミスの可能性を疑ってほしい．

10.2 応用

前の小節で学んだことを他の分野にも応用しよう．例えば次の場合の数の例題に応用してみる．

例題 10.3. 8 段の階段を 1 段または 2 段ずつ登る方法は何通りか．

（琉球大，改題）

2 段ずつ登る回数は最高 4 回までであることに注意する．

㋑ 2 段ずつ登る回数が合計 4 回の場合は 1 通り．

㋺ 2 段ずつ登る回数が合計 3 回の場合は，1 段ずつ登る回数は合計 2 回なので，$_5\mathrm{P}_2 = 20$ 通り．(★)

㋩ 2 段ずつ登る回数が合計 2 回の場合は，1 段ずつ登る回数は合計 4 回なので，$_6\mathrm{P}_2 = 30$ 通り．(★)

㋥ 2 段ずつ登る回数が合計 1 回の場合は，1 段ずつ登る回数は合計 6 回なので，7 通り．

㋭ 2 段ずつ登る回数が合計 0 回の場合は，1 段ずつ登る回数は合計 8 回なので，1 通り．

㋑ 〜 ㋭ の事象は互いに排反なので，求める場合の数は $1+20+30+7+1 = 59$ 通り．

順列と組合せの記号の取り違いによる間違いはよく見られる．4 段目と 5 段目の間に関する対称性を利用して検証しよう．題意の階段の 4 段目と 5 段目（中央をまたぐ二段）を考えると，**これらは同時に登られるか，別々に登られるかのいずれか**である．

Ⓐ 4 段目と 5 段目が同時に登られるとき，3 段目までの登り方と 6 段目からの登り方は同数である．よって，この場合の登り方の総数は **3 段目までの登り方の平方**である．

Ⓘ 4 段目と 5 段目が別々に登られるとき，4 段目までの登り方と 5 段目からの登り方は同数である．よって，この場合の登り方の総数は **4 段目までの登り方の平方**である．

Ⓐとⓘの事象は互いに排反であるから，求める場合の数の総数は**二つの平方数の和**でなければならない．59 以下の平方数は $0, 1, 4(= 2^2), \cdots, 49(= 7^2)$ があるが，いずれを 59 から引いても平方数は得られない．よって，前述の 59（通り）は正しくない．正答はⒶとⓘの場合の数を正しく数えれば良いので演習問題に残しておく．

問題 10.4. (1) 上記 Ⓐ の場合の数を求めよ．
(2) 上記 ⓘ の場合の数を求めよ．
(3) 例題 10.4 の正答を求めよ．

また，上記誤答内の ㋺，㋩ も樹形図を描くことにより修正される．こちらも試されたい．

問題 10.5. (1) 上記 ㋺ の正しい場合の数を求めよ．
(2) 上記 ㋩ の正しい場合の数を求めよ．

少し話のスケールを大きくしよう．階段が n 段の場合に 1 段または 2 段ずつ登る方法の総数を a_n とおくと，$n \geqq 3$ のとき，n 段目が登られるときは $n-1$ **段目がとばされるか否か**である．$n-1$ 段目がとばされる場合の登り方は a_{n-2} 通りであり，$n-1$ 段目がとばされない場合の登り方は a_{n-1} 通りである．これら二つの事象は互いに排反なので，

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ が言える．この漸化式が成り立つ数列を**フィボナッチ数列**という．興味のある方は数列 $\{a_n\}$ について次のことを確かめられよ．

問題 10.6. (1) $\{a_n\}$ の一般項は次で与えられることを証明せよ．

$$a_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

(2) a_{2n} は必ずある二つの平方数の和になることを証明せよ．

対称性に注意することは検算においても大切だが，解答戦略を練る際にも考慮されるべきである．次の例題で具体的に検証しよう．

例題 10.4. $\sin x + \sin y = 8/5$ のとき，$\sin(x+y)$ の最大値を求めよ．

（2012 年，弘前大・医，改題）

対称性を無視して収拾がつかなくなった答案を紹介しよう．

$\sin x = u, \sin y = v$ とおく．$\sin x + \sin y = 8/5$ より $u + v = 8/5$ で $-1 \leqq u \leqq 1$ かつ $-1 \leqq v(= 8/5 - u) \leqq 1$ より $3/5 \leqq u \leqq 1$ ($\cdots$⑫) に注意する．

加法定理より

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y (= ⑬)$$

だが，これの最大値を考えるので，$\cos x = \sqrt{1-u^2} (> 0)$ かつ $\cos y = \sqrt{1-v^2} (> 0)$ としてよい．さて，

$$\begin{aligned} ⑬ &= u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \\ &= u\sqrt{-u^2 + \frac{16}{5}u - \frac{39}{25}} + \left(\frac{8}{5} - u\right)\sqrt{1-u^2}\ (= f(u)). \end{aligned}$$

いま，

$$\begin{aligned} f'(u) &= \sqrt{-u^2 + \frac{16}{5}u - \frac{39}{25}} + u \cdot \frac{-u + \frac{8}{5}}{\sqrt{-u^2 + \frac{16}{5}u - \frac{39}{25}}} \\ &\quad - \sqrt{1-u^2} + \left(\frac{8}{5} - u\right) \cdot \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{-2u^2 + \frac{24}{5}u - \frac{39}{25}}{\sqrt{-u^2 + \frac{16}{5}u - \frac{39}{25}}} + \frac{2u^2 - \frac{8}{5}u - 1}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

$f'(u) > 0$ となる u の値の範囲を求めると $\cdots$ (♯)

与えられた式の対称性を無視してむやみに突き進むととんでもないことになることが分かって頂けたであろうか．「馬鹿，こんなのは気合いで突破するんだよ！」という人が書きそうな答案の続きを示す．しかし，このような答案は**採点者から見ても疲れる．**

$f'(u)>0$ は

$$\left(-u^2+\frac{16}{5}u-\frac{39}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2u^2+\frac{24}{5}u-\frac{39}{25}\right)>(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-2u^2+\frac{8}{5}u+1\right)\cdots⑭$$

と同値．左辺第二因子と右辺第二因子をそれぞれ $f_1(u)$, $f_2(u)$ とおくと，$3/5\leqq u\leqq 1$ なので,

$$f_1(u)=-2\left(u-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{33}{25}\geqq f_1\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5},\quad f_2(u)=-2\left(u-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{33}{25}\geqq f_2(1)=\frac{3}{5}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
⑭ \iff & \left(-u^2+\frac{16}{5}u-\frac{39}{25}\right)\left(-2u^2+\frac{8}{5}u+1\right)^2<(1-u^2)\left(-2u^2+\frac{24}{5}u-\frac{39}{25}\right)^2\\
\iff & \left(-u^2+\frac{16}{5}u-\frac{39}{25}\right)\left(4u^4-\frac{32}{5}u^3-\frac{36}{25}u^2+\frac{16}{5}u+1\right)\\
& \quad <(1-u^2)\left(4u^4-\frac{96}{5}u^3+\frac{732}{25}u^2-\frac{1872}{125}u+\frac{1521}{625}\right)\\
\iff & -4u^6+\frac{96}{5}u^5-\frac{632}{25}u^4+\frac{272}{125}u^3+\frac{7179}{625}u^2-\frac{224}{125}u-\frac{39}{25}\\
& \quad <-4u^6+\frac{96}{5}u^5-\frac{632}{25}u^4-\frac{528}{125}u^3+\frac{16779}{625}u^2-\frac{1872}{125}u+\frac{1521}{625}\\
\iff & 250u^3-600u+515u-156<0\ (\cdots⑮)
\end{aligned}$$

⑮ の左辺に $u=4/5$ を代入すると 0 になるので因数定理より⑮ の左辺は $5u-4$ で割り切れて

$$⑮\iff(5u-4)(50u^2-80u+39)<0\ (\cdots⑯)$$

となる．$50u^2-80u+39=50\{u-(4/5)\}^2+7\geqq 7$ なので,

$$⑯\iff u-\frac{4}{5}<0\iff u<\frac{4}{5}.$$

したがって，$f(u)$ の増減表は次の通り与えられる．

u	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$\frac{24}{25}$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$

ゆえに，$u=4/5$ のとき，$f(u)$ は最大値 24/25 をとる．

正解ではあるが，**対称性を無視した強行突破は解答困難な状況を生む．**しかも，複雑な式変形を伴うことから計算ミスの確率が上がってしまいリスキーである．では，対称性を活かした答案として何が考えられるだろうか.

$g(u,v)=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}$ とおく．$g(u,v)$ は多項式ではないが，$g(u,v)=g(v,u)$ という対称性をもっている．また，付帯条件の $u+v=8/5$ $(\cdots⑰)$ にも対称性があって u と v

を入れ替えても方程式自体は変わらない．高校・高専初期で習う**シュワルツの不等式**を用いた別解を一部演習問題にしつつ紹介しよう．
〈別解〉

問題 10.7. 次のシュワルツの不等式を示せ．また，等号成立条件を述べよ．

$$(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

さて，$a=u, b=v, c=\sqrt{1-u^2}, d=\sqrt{1-v^2}$ とおくと，問題 10.7 より

$$g(u,v) \leqq \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{2-(u^2+v^2)} = \sqrt{-(w-1)^2+1} \quad (=W) \cdots ⑱.$$

ただし，$w=u^2+v^2$ とした．⑱ の不等号における等号は $u\sqrt{1-v^2}=v\sqrt{1-u^2}$ ($\cdots$⑲) のとき成立する（問題 10.7 の略解を参照のこと）．

一方，問題 10.7 にて $a=b=1, c=u$ かつ $d=v$ とおくと，⑰ より $w \geqq 32/25$ ($\cdots$⑳) が成立する．このとき，$W \leqq 24/25$ ($\cdots$㉑). したがって，⑱ と ㉑ の不等号での等号が同時に成立し，かつそのときの (u,v) が題意を満たせばよい．

⑱ の不等号での等号成立条件は⑲ で，㉑ の不等号での等号成立条件は $u^2+v^2=32/25$ ($\cdots$㉒) である．⑲ と ㉒ を連立すると，$(u,v)=(4/5,4/5)$ または $(-4/5,-4/5)$. *13 このうち，$3/5 \leqq u \leqq 1$ かつ $3/5 \leqq v \leqq 1$ かつ ⑰ を満たすものは $(u,v)=(4/5,4/5)$ のみ．よって，このとき $g(u,v)$ は最大値 24/25 をとる．

シュワルツの不等式などの初等的不等式を応用する訓練を積んでおけば，**微分を使わずとも最大値や最小値を求められる場合があり**便利である．類題をいくつか挙げておく．

問題 10.8. xy 平面上の単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 (x,y) に対して, $2x+3y$ の最大値と最小値，およびそのときの (x,y) を求めよ．

問題 10.9. x, y を正の実数とする．関数 $h(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の最小値とそのときの (x,y) を求めよ．

例題 10.4 の弘前大の問題はもともと最小値を求めることも問うていた．こちらも前述の別解に即して演習問題にしておこう．

問題 10.10. u, v を $3/5 \leqq u \leqq 1, 3/5 \leqq v \leqq 1$ かつ $u+v=8/5$ を満たす実数とする．関数 $z=-u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}$ の最小値とそのときの (u,v) を求めよ．

さらに，例題 10.4 は三角関数の和積公式を用いても解かれる．一部を演習問題に残しておこう：$\alpha=(x+y)/2, \beta=(x-y)/2$ とすると，例題 10.4 は $\sin\alpha\cos\beta=4/5$ ($\cdots$㉓) の下で $\sin 2\alpha$ の最大値を求める問題と同義である．最小値もあわせて求められたい．

問題 10.11. ㉓ の下で $\sin 2\alpha$ の最大値と最小値を求めよ．

*13 この時点では $g(u,v)$ の最大値を与える (u,v) の “候補” を求めたに過ぎないことに注意しよう．

11　全事象の確率の和は 1

すべての事象に対する確率を足すと必ず 1 になる．しかし，どういうわけかこの確認を怠ったまま確率や期待値を計算している答案が多い．

11.1　基本

例題 11.1. 赤玉 2 個と白玉 4 個が入った袋から，玉を 1 個ずつ取り出す．ただし，一度取り出した玉はもとに戻さないものとする．
(1) 3 回目に初めて赤玉が出る確率を求めよ．
(2) 5 回目に初めて赤玉が出る確率を求めよ．

（2009 年，西南学院大・神，商，人間科学部 A 日程）

確率の問題では題意を勘違いして計算を誤る方も多い．例えば，このような勘違いがありうる．

> (1) 3 回目に初めて赤玉を引く確率を求めるには，赤玉 1 個と白玉 2 $(=3-1)$ 個を選ぶ場合の数を，すべての玉 6 個から異なる 3 個を選ぶ場合の数で割ればよい (★). よって，答は
> $$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{5}.$$
> (2) 5 回目に初めて赤玉を引く確率を求めるには，赤玉 1 個と白玉 4 $(=5-1)$ 個を選ぶ場合の数を，すべての玉 6 個から異なる 3 個を選ぶ場合の数で割ればよい (★). よって，答は
> $$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}.$$

題意のルールでは白玉が取り出せるのはせいぜい 4 回目までである．先の誤答の論理で計算すると，1 回目，2 回目，4 回目で赤玉初出の確率はそれぞれ

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15},\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15},\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}.$$

となってしまう．赤玉初出の回が異なる事象は同時には起こらないから，誤答の場合とあわせて

$$\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{5}+\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{28}{15}$$

となり，右辺が 1 にならない．計算方法自体は同一であるから，**その計算方法自体が誤っていたのでは**ないかと考えられる．取り出した玉は元に戻さないから全事象の場合の数は

15 通りである．そこで，赤玉，白玉をそれぞれ R, W と表し，1 回目から 6 回目までに取り出す玉を左から書き並べるとする．

$$
\begin{array}{llllll}
RRWWWW & (\cdots①) & RWRWWW & (\cdots②) & RWWRWW & (\cdots③) \\
RWWWRW & (\cdots④) & RWWWWR & (\cdots⑤) & WRRWWW & (\cdots⑥) \\
WRWRWW & (\cdots⑦) & WRWWRW & (\cdots⑧) & WRWWWR & (\cdots⑨) \\
WWRRWW & (\cdots⑩) & WWRWRW & (\cdots⑪) & WWRWWR & (\cdots⑫) \\
WWWRRW & (\cdots⑬) & WWWRWR & (\cdots⑭) & WWWWRR & (\cdots⑮)
\end{array}
$$

このように，赤玉初出が 1 回目なのは ① 〜 ⑤ の 5 通り，赤玉初出が 2 回目なのは ⑥ 〜 ⑨ の 4 通り，赤玉初出が 3 回目なのは⑩ 〜 ⑫ の 3 通り，赤玉初出が 4 回目なのは ⑬ 〜 ⑭ の 2 通り，赤玉初出が 5 回目なのは ⑮ の 1 通り．この時点で (1) の正答が $3/15 = 1/5$, (2) の正答が $1/15$ であることは分かった．

しかし，(1) の誤答はどのように立て直されるのだろう．(1) 相当の事象は⑩ 〜 ⑫ により示される．これらを見ると，3 回目で赤玉を初めて出すことは，1〜2 回目で白玉を出しかつ 3 回目で赤玉を出すことと同じであると分かる．つまり，**残り 1 個の赤玉を 4〜6 回目のどこかで引く**ことと解される．残り 1 個の赤玉を引かれた回を除く 4〜6 回目の内に残り 2 個の白玉は引かれるわけである．よって，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{1}{5}.$$

(2) の誤答の立て直しは読者に譲りたい．

問題 11.1. 例題 11.1 の正答が $1/15$ であることを組合せの式により示せ．

このように，例題 をていねいに考えると **全事象数は互いに排反になるよう分けられた事象の数の総和に等しい**ことまで分かる．このことを利用して平方数の和の公式を導くことができる．

問題 11.2. (1) $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ を示せ．
(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = n(n+1)(n+2)/3$ を示せ．
(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ を示せ．

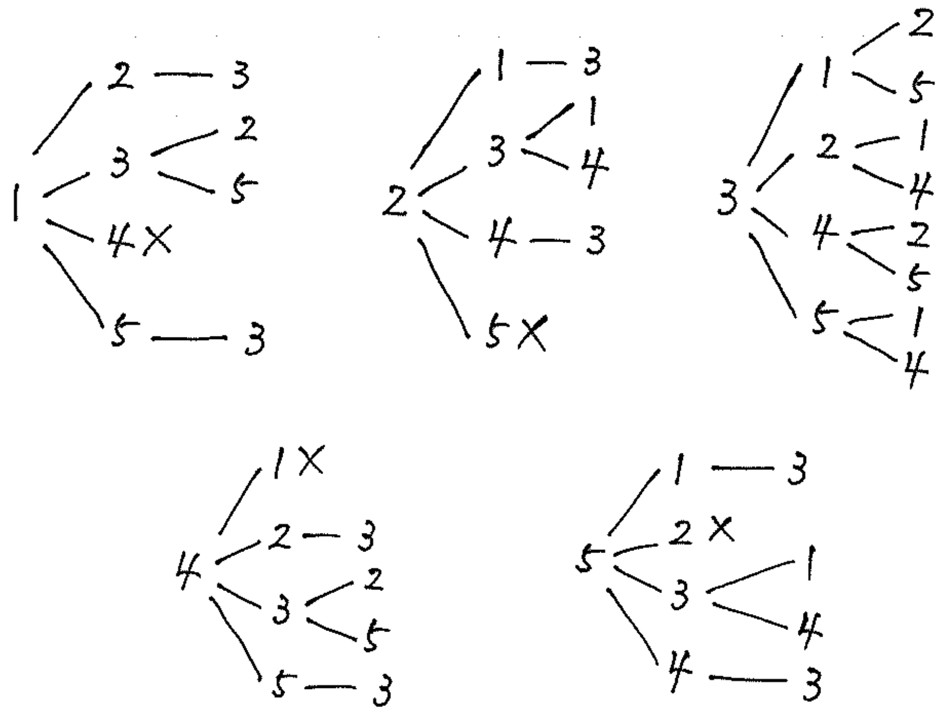
確率と整数の基本的性質を絡めた問題もよく見かける．

例題 11.2. 1, 2, 3, 4, 5 の 5 枚のカードが袋に入っている．この中から 1 枚ずつ順番に 3 枚のカードを引いて，左から順に並べて得られる 3 桁の数 N を考える．
(1) N が 3 の倍数である確率を求めよ．
(2) N を 3 で割った余りを X とする．X の期待値を求めよ．

（2013 年，埼玉大学・理・工・後期，改題）

題意の示す樹形図をすべて書くことが途中で面倒になったのだろうと推察される誤答を

紹介したい．



(1) 上の樹形図に示す通り題意の事象は 24 通りある．ただし，各枝にて左から百，十，一の位を表す．よって，求める確率は $24/{}_5\mathrm{P}_3 = 2/5$.

(2) N の一の位は 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかである．よって，(1) のそれぞれの枝に相当する N に 1 を足すかまたは 2 を引けば，3 で割った余りが 1 になり，2 を足すかまたは 1 を引けば，3 で割った余りが 2 となる．N が 3 の倍数になる場合は (1) で示したように 24 通りなので，N を 3 で割って 1 余る場合も 2 余る場合も $24 \cdot 2 = 48$ 通り (★) である．したがって，求める期待値は

$$0 \cdot \frac{24}{60} + 1 \cdot \frac{48}{60} + 2 \cdot \frac{48}{60} = \frac{12}{5}.$$

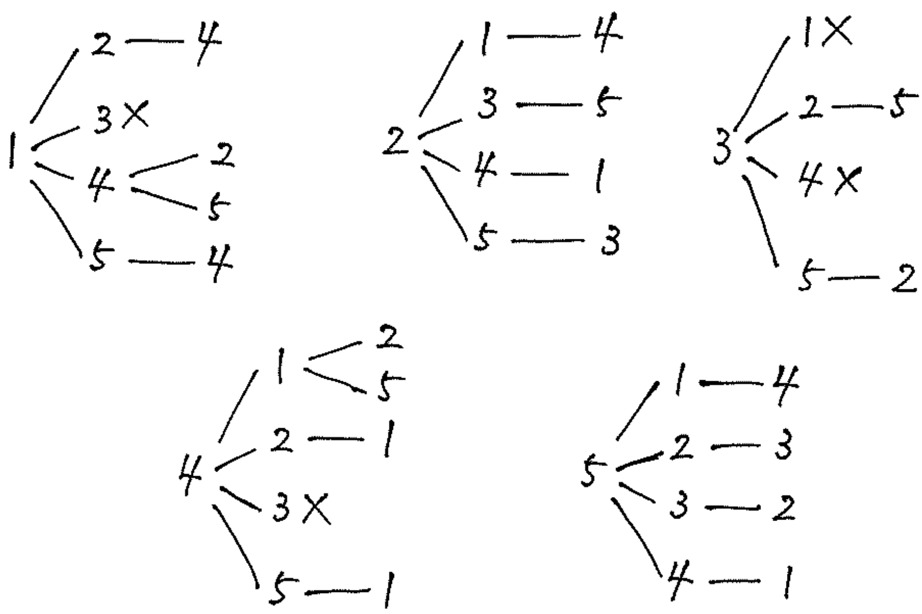
X のとりうる値が 0, 1, 2 しかないことを考えると，**(2) の答は必ず 0 以上 2 以下のはず**である．実際，X の値が 0, 1, 2 である確率をそれぞれ p, q, r とする[14]と，$p+q+r=1$ であるはずだから

$$0 = 0 \cdot (p+q+r) \leqq 0 \cdot p + 1 \cdot q + 2 \cdot r \leqq 2 \cdot (p+q+r) = 2.$$

[14] $p = 2/5$ は現時点で分かっているが，簡単のためにあえてぼかしておく．

一方，12/5 > 2 なので上記誤答では (2) の得点は残念ながらかなり厳しいであろう．しかも，$p = 2/5$ かつ $q = r = 48/60 = 4/5$ としているので $p+q+r = 2(>1)$ でもある．採点者からも「何も分かってないな」とすら思われかねない．

(1) の樹形図は正しいので，誤りがあるとすれば N を 3 で割った余りが 1 または 2 の場合の数を求めるくだりである．誤答の数え方では，例えば $N = 123$ のときに $N = 121$ と $N = 124$ を $X = 1$ なる場合としてカウントすることになる．しかし，1 のカードは 1 枚しかないので，$N = 121$ とはなりえない．そこで，面倒なのをがまんして $X = 1$ となる場合の樹形図を (1) の答案にならって描くと次のようになる．



枝の本数が 18 本なので，$X = 1$ となる確率は $18/60 = 3/10$. また，$X = 2$ となる事象は $X = 0$ または 1 となる事象の余事象だから，$X = 2$ となる確率は $1-(2/5)-(3/10) = 3/10$. よって，求める期待値は

$$0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{10}.$$

問題 11.3. $X = 2$ となる場合の樹形図を描け．

正解は得られたが，樹形図を描くのが面倒な人の要望に応えていないので納得のいかない方もいるだろう．(1) も込みで樹形図を使わない別解を考えてみよう．

〈別解〉 まず次の事実を挙げておく．証明は演習とする．

問題 11.4. 例題 11.2 において a, b, c の 3 枚のカードをこの順番で引いたとき，次の二つの条件は同値であることを示せ．

(i) $N = 100a + 10b + c$ が 3 の倍数であること．
(ii) $a + b + c$ が 3 の倍数であること．

この結果から，同じ数が書かれたカードが 2 枚以上はないので，1〜5 のカードから異なる 3 枚を選ぶ場合の数 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りから和が 3 の倍数になる組合せを選ぶと，$(1,2,3)$, $(1,3,5)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ の 4 通り．それぞれの組に従うカード 3 枚を 1 列に並べる方法は $3! = 6$ 通りなので，(1) の答は $(4 \cdot 6)/{}_5\mathrm{P}_3 = 2/5$.

(2) 問題 11.4 の a, b, c に対して，
㋑ $N(= 100a + 10b + c) = 3m + 1$（$m$ は整数）のとき，$666 - N$ は 3 で割ると 2 余り，$666 - N$ の百，十，一の位はそれぞれ $6 - a$, $6 - b$, $6 - c$ であることに注意しよう．実際，$666 - N = 665 - 3m = 3(221 - m) + 2$ でかつ $666 - N = 100(6 - a) + 10(6 - b) + (6 - c)$.
㋺ $N(= 100a + 10b + c) = 3m + 2$（$m$ は整数）のとき，㋑と同様に $666 - N$ は 3 で割ると 1 余り，$666 - N$ の百，十，一の位はそれぞれ $6 - a$, $6 - b$, $6 - c$ である．
a, b, c は 1〜5 までの整数なので，$6 - a$, $6 - b$, $6 - c$ もそうである．よって，$X = 1$ となる N のとり得る値と $X = 2$ となる N のとり得る値は同数だけ存在する．したがって，$X = 1$ となる場合の数と $X = 2$ となる場合の数は $(60 - 4 \cdot 6)/2 = 18$ 通り．ゆえに，求める期待値は $0 \cdot (2/5) + 1 \cdot (18/60) + 2 \cdot (18/60) = 9/10$.

例題 11.2 に関する問題を演習に残しておく．

問題 11.5. 例題 11.2 の N を 9 で割った余りを Y とする．
(1) 問題 11.4 の a, b, c に対して，N を 9 で割った余りと $a + b + c$ を 9 で割った余りは同じであることを示せ.
(2) Y の期待値を求めよ.

11.2 応用

場合の数や確率の問題では次の例題のようにルールを煩雑にしてミスを誘発させる構造の問題が多い.

例題 11.3. 2 つの箱 A, B がある．A の箱には，次のように 6 枚のカードが入っている：0 の数字が書かれたカードが 1 枚，1 の数字が書かれたカードが 2 枚，2 の数字が書かれたカードが 3 枚．B の箱には，次のように 7 枚のカードが入っている：0 の数字が書かれたカードが 4 枚，1 の数字が書かれたカードが 1 枚，2 の数字が書かれたカードが 2 枚．A の箱から 1 枚，B の箱から 2 枚，あわせて 3 枚のカードを取り出す.
(1) 3 枚のカードに書かれた数の積が 4 である確率を求めよ．
(2) 3 枚のカードに書かれた数の積が 0 である確率を求めよ．

（2002 年，センター本試，改題）

確率の和の法則の誤った適用による計算ミスは多い．次の事例で見てみよう．(2) のみで失敗するケースである．

まず，題意の積は 0, 2, 4, 8 の 4 通りしかないことに注意しよう．
(1) ㋑ A から 2 のカードを 1 枚，B から 2 のカードを 1 枚と 1 のカードを 1 枚取り出すとき．その確率は $(3/6)\cdot\{(1\cdot 2)/{}_7C_2\} = 1/21$.
㋺ A から 1 のカードを 1 枚，B から 2 のカードを 2 枚取り出すとき．その確率は $(2/6)\cdot(1/{}_7C_2) = 1/63$.
㋑ ㋺ より求める確率は $(1/21) + (1/63) = 4/63$.
(2) ㋩ A の箱から出したカードが 0 の確率は 1/6.
㊁ B の箱から出した 2 枚のカードの積が 0 の確率は，2 枚とも 0 の確率 $6/21 = 2/7$ と 1 枚のみ 0 の確率 $(4\cdot 3)/21 = 4/7$ の和なので $(2/7) + (4/7) = 6/7$.
㋩ ㊁ より求める確率は $(1/6) + (6/7) = 43/42$. (★)

(2) の答は 1 を越えている時点で論外ではある．確率の和の法則は**事象が互いに排反であることを前提に**成り立つことに注意しよう．誤答の方法ではカード 3 枚がすべて 0 の場合は㋩と㊁の両方にヒットしてしまい，和の法則が適用できない．そこで，㊁から㋩の事象を除いた場合を考える．

㊁′ A の箱から 1 または 2 のカードを出し，かつ B の箱から少なくとも一つ 0 のカードを出す場合，

- B の箱から 0 のカード 2 枚を出すとき，その確率は $(5/6)\cdot(6/21) = 5/21$.
- B の箱から 0 のカードを 1 枚だけ出すとき，その確率は $(5/6)\cdot\{(4\cdot 3)/21\} = 10/21$.

よって，この場合の確率は $(5/21) + (10/21) = 5/7$.
㋩と㊁′ の事象は互いに排反であるから，求める確率は $(1/6) + (5/7) = 37/42$.

確率の和の法則を利用するときは**和をとる事象が互いに排反か確認**してほしい．また，センター試験や一部の私大入試などは問題分量を増やし，かつ時間を短くすることでミスを誘発するよう設計されている．前段のような修正が困難な場合は**無理をせず別解にて対処する**のも一手である．
〈(2) の別解〉 題意の 3 枚のカードの積としてあり得る値は 0, 2, 4, 8 のいずれかである．積が 8 となる確率は $(3/6)\cdot(1/21) = 1/42$ で，積が 2 となる確率は $(1/3)\cdot(2/21) = 2/63$.
(1) の結果より求める確率は

$$1 - \left(\frac{2}{63} + \frac{4}{63} + \frac{1}{42}\right) = \frac{37}{42}.$$

まさに「全事象の確率の総和は 1 であること」を利用したトリックである．例題 11.3 のセンター試験の問題は次のことも問うていたが，こちらは演習とする．

問題 11.6. 例題 11.3 の 3 枚のカードの積の期待値を求めよ．

例題 11.4. 3 人でじゃんけんを行う．負けた者はその時点で脱落し，残った者で勝負を続ける．ちょうど n 回目で勝者一人が決まる確率 p_n を求めよ．

あさっての方を向いた誤答を一つ紹介しよう．

> 甲，乙，丙の 3 人が一回じゃんけんをして敗者が出ない確率，誰か一人が勝つ確率はともに 1/3 （下表参照）．

甲	乙	丙	結果	甲	乙	丙	結果	甲	乙	丙	結果
グー	グー	グー	敗者なし	チョキ	グー	グー	甲が敗退	パー	グー	グー	甲が優勝
グー	グー	チョキ	丙が敗退	チョキ	グー	チョキ	乙が優勝	パー	グー	チョキ	敗者なし
グー	グー	パー	丙が優勝	チョキ	グー	パー	敗者なし	パー	グー	パー	乙が敗退
グー	チョキ	グー	乙が敗退	チョキ	チョキ	グー	丙が優勝	パー	チョキ	グー	敗者なし
グー	チョキ	チョキ	甲が優勝	チョキ	チョキ	チョキ	敗者なし	パー	チョキ	チョキ	甲が敗退
グー	チョキ	パー	敗者なし	チョキ	チョキ	パー	丙が敗退	パー	チョキ	パー	乙が優勝
グー	パー	グー	乙が優勝	チョキ	パー	グー	敗者なし	パー	パー	グー	丙が敗退
グー	パー	チョキ	敗者なし	チョキ	パー	チョキ	乙が敗退	パー	パー	チョキ	丙が優勝
グー	パー	パー	甲が敗退	チョキ	パー	パー	甲が優勝	パー	パー	パー	敗者なし

> 題意の事象は $n-1$ 回目まで誰も負けず，かつ n 回目に誰か一人が勝つ事象と同等である (★) なので，
> $$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

題意のルールでじゃんけんを続けるといつか必ず勝者は一人決まる．直観的には自明だが背理法で証明しておく：永遠に勝者一名が決まらない (⋯Ⓐ) 確率 q が 0 より大きいと仮定すると, n 回目（n は任意の自然数）までずっと優勝者が決まらない (⋯Ⓑ) 確率 q_n は q 以上である．Ⓐ が成り立つならば Ⓑ も成り立つからである．よって，$\lim_{n\to\infty} q_n \geqq q (> 0)$ (⋯⑯) が言えるはず.

一方，次の事実に注意されたい.

問題 11.7. (1) 3 人でじゃんけんを一回したとき，勝者一名が決まらない確率は 2/3 であることを示せ．(2) 2 人でじゃんけんを一回したとき，あいこになる確率が 1/3 であることを示せ.

よって，勝ち残り人数に関係なく $q_n \leqq (2/3)^n$ が成立．$n \to \infty$ とすると，$\lim_{n\to\infty} q_n \leqq \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$ (⋯⑰). ⑯ と ⑰ は両立しない．ゆえに，$q = 0$ である．

勝負が決まる回が二つ以上存在することはないので，$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} p_n = 1$. しかし，上記の誤答によれば

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} p_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

なので，例題 11.4 のじゃんけんは確率 1/2 で永遠に勝負がつかないことになる．この結果は $q=0$ と両立しない．

誤答内の表が示す通り，誤りの原因は**2 人勝ち残る場合が考慮されていなかった**ことである．勝ち残り人数に応じて複数の漸化式を立てるのが例題 11.4 のポイントである．

n 回目のじゃんけんが終わった時点での勝ち残り人数が 3 人，2 人となる確率をそれぞれ r_n, s_n としよう．このとき，誤答内の表から次の漸化式が得られる．

$$\begin{cases} r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n & (n=1,2,\cdots) \quad \cdots ⑱ \\ s_n = \frac{1}{3}r_{n-1} + \frac{1}{3}s_{n-1} & (n=2,3,\cdots) \quad \cdots ⑲ \\ p_n = \frac{1}{3}r_{n-1} + \frac{2}{3}s_{n-1} & (n=2,3,\cdots) \quad \cdots ⑳ \end{cases}$$

⑱ を ⑲ に代入して，両辺に 3^n をかけて $u_n = 3^n s_n$ とおくと $u_n = u_{n-1}+1$. これは数列 $\{u_n\}$ が公差 1 の等差数列であることを意味している．また，$u_1 = 3s_1 = 3\cdot(1/3) = 1$ より $u_n = n$. よって，$s_n = n/3^n$ ($\cdots$㉑). ⑱ と㉑ を ⑳ に代入すると

$$p_n = \frac{2n-1}{3^n}.$$

今度こそ $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$ のはずである．次の方法で確認してほしい．

問題 11.8. (1) $P_N = \sum_{n=1}^{N} p_n$ を求めよ．
(2) $\lim_{N\to\infty}(2N-1)/3^N = 0$ を示せ．
(3) $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$ を確かめよ．

12 ベクトルには具体的成分を与えよ

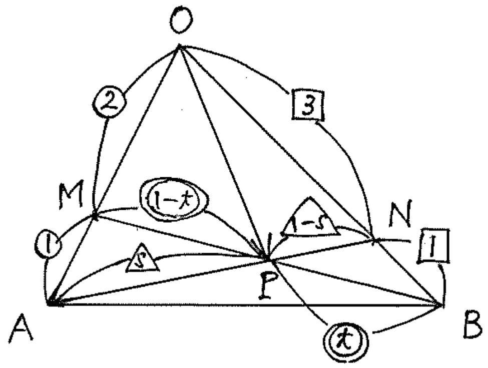
ベクトルの問題を苦手とする学生の方は多いようだが，ベクトルに成分を与えて座標平面や座標空間の話と捉えた途端おかしさが露呈する場合がある．誤答を修正しながらどのような点に注意したら良いか考えよう．

12.1 基本

まずは教科書水準の問題から．

例題 12.1. 三角形 OAB の辺 OA 上に $OM:MA=2:1$ となる点 M を，辺 OB 上に $ON:NB=3:1$ となる点 N をとる．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，かつ二線分 AN と BM の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ．

式の立て方は良いが，その後の処理が悪い例を挙げよう．



s, t を 0 より大きく 1 より小さい実数とし, $AP : PN = s : (1-s)$, $BP : PM = t : (1-t)$ とする．このとき，題意より

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s\overrightarrow{ON} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{4}s\vec{b} \quad (\cdots ①)$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\vec{b} = \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad (\cdots ②)$$

① ② より

$$\begin{cases} s + \frac{2}{3}t = 1 & \cdots ③ \\ \frac{3}{4}s + t = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$

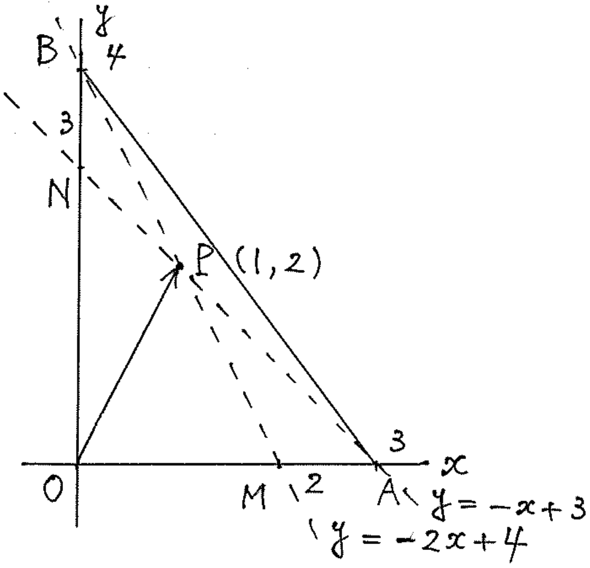
③ − (2/3)·④ より

$$\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)s = \frac{1}{3}. \quad (★)$$

よって，$s = 3$ なので ① から

$$\overrightarrow{OP} = -2\vec{a} + \frac{9}{4}\vec{b}. \quad \cdots ⑤$$

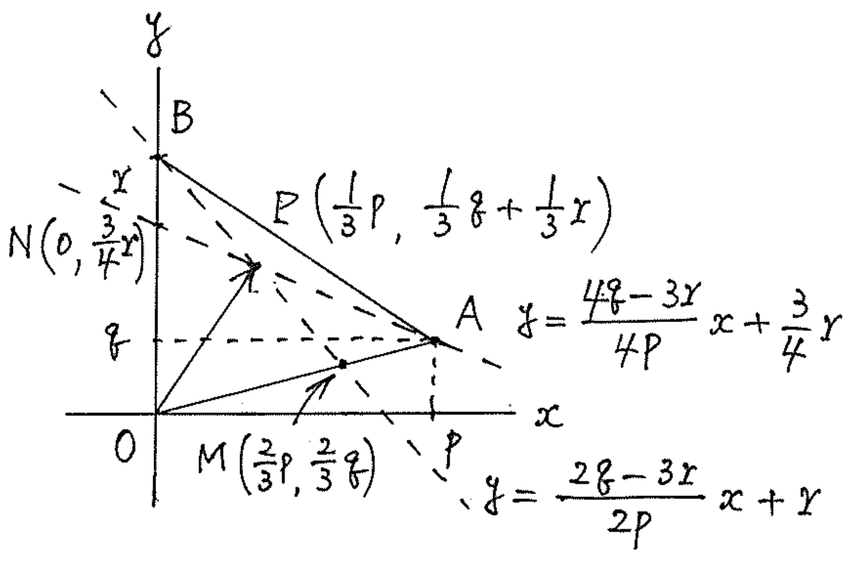
これがマーク式など結果のみを問う形式の試験ならば得点は絶望的であろう．s のみならず t を求めなかったことが悔やまれる．例えば，$s = 3$ を ③, ④ に代入すればそれぞれ $t = -3$, $t = -(5/4)$ となり不合理である．



さて，点 O を xy 平面上の原点と見なし，$\vec{a} = (3,0)$, $\vec{b} = (0,4)$ としてみる．このとき，$M = (2,0)$, $N = (0,3)$ なので，直線 AN, BM の方程式はそれぞれ $y = -x+3$, $y = -2x+4$. これを連立して得られる解 $(x,y) = (1,2)$ こそ点 P の座標である．しかし，⑤ に $\vec{a} = (3,0)$, $\vec{b} = (0,4)$ を代入すると，$\overrightarrow{OP} = (-6,9)$ となり点 P の座標に合わない.

一方，① によれば $\overrightarrow{OP} = (3-3s, 3s)$ で，$x+y = 3-3s+3s = 3$ を満たしている．各成分は正なので，点 P は線分 AN 上（両端除く）にある．② によっても $\overrightarrow{OP} = (2t, 4-4t)$ で，$2x+y = 4t+4-4t = 4$ を満たす．各成分は正なので，点 P は線分 BM 上（両端除く）にある．これらの事実は題意に合致する．① と ② の式にも誤りは見られないので，③ ④ の連立方程式を誤って解いたと考えるのが妥当であろう．例題 12.1 の正答は各自で確認されたい.

問題 12.1. ③ ④ の連立方程式を正確に解いて，例題 12.1 の正答は $\overrightarrow{OP} = (1/3)\vec{a} + (1/2)\vec{b}$ であることを確かめよ.



先の修正では $\vec{a}=(3,0)$, $\vec{b}=(0,4)$ として誤答を検証したが，$\vec{a}=(p,q)$ $(p>0)$, $\vec{b}=(0,r)$ $(r>0)$ とすると別解が得られる：このとき, 直線 AN の方程式は $y=\{(4q-3r)/4p\}x+(3/4)r$ $(\cdots⑤)$, 直線 BM の方程式は $y=\{(2q-3r)/2p\}x+r$ $(\cdots⑥)$. ⑤ ⑥ より

$$(x,y)=\left(\frac{1}{3}p,\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r\right)=\frac{1}{3}(p,q)+\frac{1}{2}(0,r)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

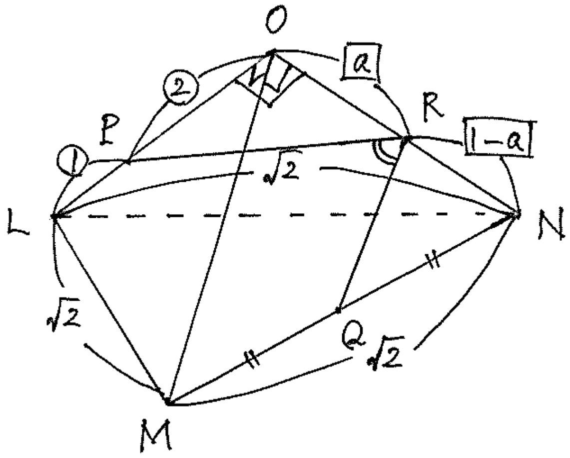
補助線を利用した幾何的解法もよく知られているが，読者の演習に残しておこう.

問題 12.2. 例題 12.1 において，点 M を通りかつ直線 AN と平行な直線が線分 OB と交わる点を Q とする.

(1) $MP:PB=1:1$ を示せ.

(2) $\overrightarrow{OP}=(1/3)\vec{a}+(1/2)\vec{b}$ を示せ.

空間ベクトルの場合は少々複雑になるが，やはり成分を与えることで問題の印象もがらりと変わる.



例題 12.2. O, L, M, N を頂点とする四面体がある．OLM, OMN, ONL はそれぞれ LM, MN, NL を長さ $\sqrt{2}$ の斜辺にもつ直角二等辺三角形であるという．線分 OL を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 MN の中点を Q とする．a を 1 より小さい正の実数とする．線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とする．$\vec{l}=\overrightarrow{OL}, \vec{m}=\overrightarrow{OM}, \vec{n}=\overrightarrow{ON}$ とおく．$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$ のとき a の値を求めよ．

（2001 年，センター本試，改題）

ベクトルの差の順序を間違えるケースもよく見られる．次の誤答例はその類のものだが，結果は運良く合っているという変な例である．

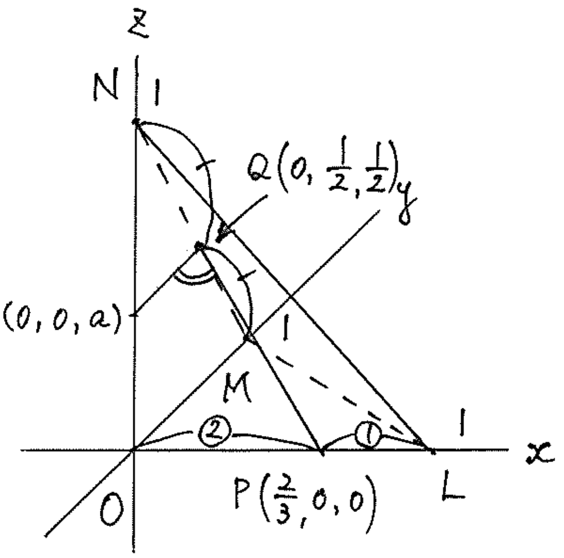
$$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\ (\bigstar)\ =a\vec{n}-\frac{2}{3}\vec{l}\quad\cdots ⑦$$

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\ (\bigstar)\ =a\vec{n}-\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})=\left(a-\frac{1}{2}\right)\vec{n}-\frac{1}{2}\vec{m}\quad\cdots ⑧$$

$|\vec{l}|=|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ かつ $\vec{l}\cdot\vec{m}=\vec{m}\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\vec{l}=0$ なので，⑦ ⑧ より

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=a\left(a-\frac{1}{2}\right)=0\Longleftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

結果のみを問う形式の試験ならば正解扱いであろうが，記述式ではいくらか減点されそうな答案である．得点は解答形式によるであろう．



では，具体的に成分を与えてみよう．題意から $\vec{l}=(1,0,0)$, $\vec{m}=(0,1,0)$, $\vec{n}=(0,0,1)$ としてよい．このとき，三点 P, Q, R の座標はそれぞれ $(2/3,0,0)$, $(0,1/2,1/2)$, $(0,0,a)$．これより

$$\overrightarrow{RP}=\left(\frac{2}{3},0,-a\right),\quad \overrightarrow{RQ}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}-a\right).$$

一方，

$$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{2}{3},0,a\right),\quad \overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\left(0,-\frac{1}{2},a-\frac{1}{2}\right)$$

となるので，⑦ ⑧ はそれぞれ次のように修正されるべきである．

$$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}\quad \cdots ⑦'$$

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})-a\vec{n}=\frac{1}{2}\vec{m}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\vec{n}\quad \cdots ⑧'$$

この成分から直接内積をとって $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=a\{a-(1/2)\}=0 \Leftrightarrow a=1/2$ としてもよい．

例題 12.2 は三直線 OL, OM, ON のどの二つも点 O で直交することが効いて計算が楽であったが，次のようにアレンジするとどうだろうか．

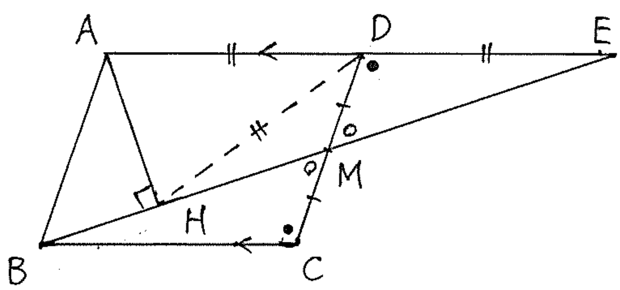
問題 12.3. 例題 12.2 の四面体 $OLMN$ が一辺 $\sqrt{2}$ の正四面体のとき，$\angle PRQ<90^\circ$ であることを示せ．

12.2 応用

次の問題は中学校の参考書にありそうな問題ではあるが，ベクトルの観点から見直すとかなり手強い問題になる．

例題 12.3. 平行四辺形 $ABCD$ の辺 CD の中点を M とし，点 A から線分 BM に垂線 AH を下ろす．三角形 ADH は二等辺三角形であることを示せ．

まずは中学校の復習も兼ねて正しい幾何的証明を見ておこう．



二直線 AD, BM の交点を E とする．このとき，二三角形 BCM, EDM は二直線 AD と BC が平行であることと点 M が線分 CD の中点であることから合同となる．よって，$AD = BC = ED$. しかも，$\angle AHE = 90^\circ$ により点 H は点 D を中心とした半径 AD の円上になければならない．したがって，$AD(= ED) = HD$ なので三角形 ADH は二等辺三角形である．（終）

さて，これをベクトルの問題として捉えると煩わしい計算をする羽目になる．次の答案はその過程でどじを踏んで行き詰まった例である．

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{AM} = \vec{d} + (1/2)\vec{b}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \vec{d} - (1/2)\vec{b}$. さらに，$\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BM} = -(k/2)\vec{b} + k\vec{d}$（$k$ は実数定数）とおくと，$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = (1 - k/2)\vec{b} + k\vec{d}$ $(\cdots⑨)$. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ より，

$$\left(1 - \frac{k}{2}\right)(\vec{b} \cdot \vec{d}) + k|\vec{d}|^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)|\vec{b}|^2 - \frac{k}{2}(\vec{b} \cdot \vec{d}) = 0.$$

$|\vec{d}|^2 = x, \vec{b} \cdot \vec{d} = y, |\vec{b}|^2 = z$ として上式を k について解くと，

$$k = \frac{-\frac{1}{2}z + y}{x - y + \frac{z}{4}}. \quad (\bigstar)$$

ここで，$x-y+(z/4)=|\vec{d}-(1/2)\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BM}|^2\neq 0$ に注意する．⑨ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DH} &= \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}\\
&= \left(1-\frac{k}{2}\right)\vec{b}+(k-1)\vec{d}\\
&= \frac{x-y+\frac{z}{4}+\frac{z}{4}-\frac{y}{2}}{x-y+\frac{z}{4}}\vec{b}\\
&\quad +\frac{-\frac{z}{2}+y-x+y-\frac{z}{4}}{x-y+\frac{z}{4}}\vec{d}\\
&= \frac{x-\frac{3}{2}y+\frac{z}{2}}{x-y+\frac{z}{4}}\vec{b}+\frac{-x+2y-\frac{3}{4}z}{x-y+\frac{z}{4}}\vec{d}.
\end{aligned}$$

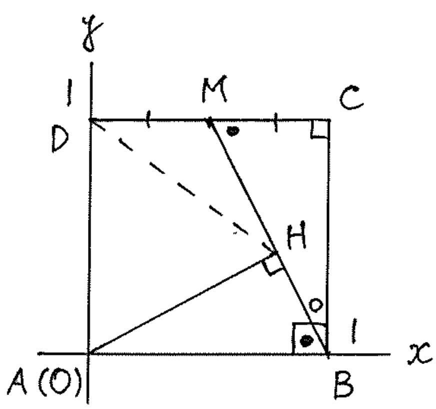
したがって，

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{DH}|^2\left(x-y+\frac{z}{4}\right)^2\\
&=\left(x-\frac{3}{2}y+\frac{z}{2}\right)^2 x+2\left(x-\frac{3}{2}y+\frac{z}{2}\right)\left(-x+2y-\frac{3}{4}z\right)y+\left(-x+2y-\frac{3}{4}z\right)^2 z=\cdots(\sharp).
\end{aligned}$$

この式の最後をどのように変形しても $x(x-y+z/4)^2$ にはならない．解答者の胸中は察するが k を誤ったことから大幅な減点になるだろう．残り時間が短いときにこれまでの解答を全部消して最初から書き直すのは大変である．解答を全部消すと同時に時間切れになるという最悪の可能性も考えなければならない．もしそうなれば部分点すら取れなくなる．

まず，従来の方針を変えないまま上記誤答を立て直す方法を一つ与えよう．上記の誤答はおもに次の三つの部分に分けられる．

- Ⓐ: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ を用いて表すくだり．
- Ⓑ: k を x, y, z を用いて表すくだり．
- Ⓒ: $\overrightarrow{DH}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ を用いて表すくだり．



ここで，点 A が座標平面上の原点と重なるようにし，かつ $\vec{b}=(1,0), \vec{d}=(0,1)$ としてみる．このとき，$x=z=1, y=0, M=(1/2,1)$ でかつ次のことも容易に分かる．

問題 12.4. (1) $k=2/5$ であることを示せ．
(2) $H=(4/5,2/5)$ であることを示せ．

まず，Ⓐ を検証しよう．問題 12.4 から $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AH}$ はそれぞれ $(1/2,1), (-1/2,1), (-1/5,2/5), (4/5,2/5)$ となるはずである．一方，誤答によってもこれらの事実は変わらない．

次に Ⓑ を検証する．問題 12.4 (1) では $k=2/5$ となっていたが，(★) によると $k=-2/5$ であり不適．しかも，これは点 H が線分 BM の外にあることを意味しており全く不合理である．

Ⓒ の検証は読者に任せよう：

問題 12.5. Ⓒ が不合理であることを検証せよ．

賢い人ならば $\vec{b}=(1,0), \vec{d}=(0,1)$ とまでせずとも，$\angle BAD=90^\circ$ の場合ですら誤答がおかしいことに気付くのではないだろうか：このとき $y=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ だが，誤答によれば

$$k=\frac{-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{d}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2}<0$$

となり，やはり点 H が線分 BM の外にあることになる．

$$k=\frac{\frac{1}{2}z-y}{x-y+\frac{z}{4}}$$

なので，Ⓑ 以降は次のように修正される．

$1-(k/2)=\{x-(y/2)\}/\{x-y+(z/4)\}, k-1=\{(z/4)-x\}/\{x-y+(z/4)\}$ より

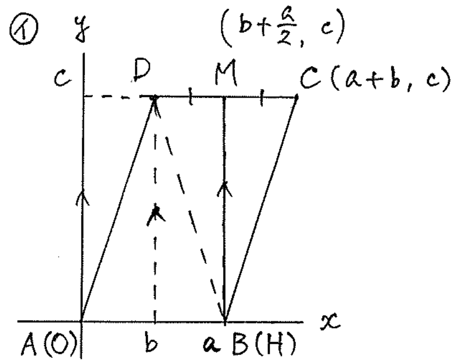
$$\left(x-y+\frac{z}{4}\right)\overrightarrow{DH}=\left(x-\frac{y}{2}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{4}z-x\right)\vec{d}$$

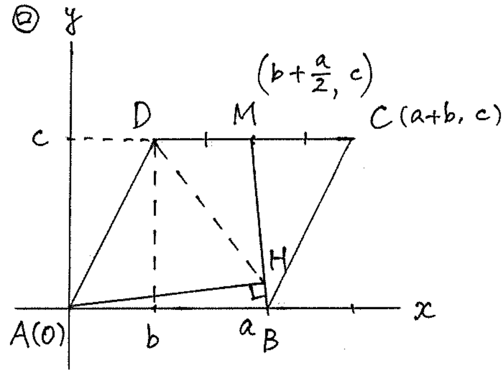
なので，

$$\begin{aligned}
&\left(x-y+\frac{z}{4}\right)^2|\overrightarrow{DH}|^2\\
=\ &\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 z+2\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{z}{4}-x\right)y+\left(\frac{z}{4}-x\right)^2 x\\
=\ &\left(x-\frac{y}{2}\right)\cdot x(z-2y)+\left(\frac{z}{4}-x\right)^2 x\\
=\ &x\left\{x^2+(-y)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2+2\cdot x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot\left(\frac{z}{4}\right)+2\cdot\left(\frac{z}{4}\right)\cdot x\right\}\\
=\ &\left(x-y+\frac{z}{4}\right)^2 x.
\end{aligned}$$

$\{x-y+(z/4)\}^2=|\vec{d}-(1/2)\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BM}|^2\neq 0$ より $|\overrightarrow{DH}|^2=x=|\vec{d}|^2$ つまり $AD=DH$．（終）

「平行四辺形 $ABCD$ が正方形の場合のチェックだけ済ますなんて．もっと一般的に $A=(0,0)$, $\vec{b}=(a,0)$ かつ $\vec{d}=(b,c)$（a, c は正の実数）として厳密に検算するべきだ！」という人もいるだろう．たしかに検算にはなるだろうが，その場合は次のような別解になってしまうのではないだろうか．





〈別解〉㋑ 二点 B, M の x 座標が同じとき：$\overrightarrow{AC}=(a+b,c)$ より $\overrightarrow{AM}=((a/2)+b,c)$ なので，$(a/2)+b=a$ つまり $a=2b$. このとき，直線 BM は x 軸に垂直なので $H=B$. いま，点 D の座標は $(b,c)=(a/2,c)$ なので，点 D は線分 AB の垂直二等分線上にある．よって，三角形 ABD は二等辺三角形なので $AD=BD$.

㋺ 二点 B, M の x 座標が異なるとき：㋑ の考察から $a\neq 2b$ であることに注意する．さて，二直線 BM, AH の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{-2c}{a-2b}(x-a),\quad y=\frac{a-2b}{2c}x$$

である．これらを連立して点 H の座標

$$\left(\frac{4ac^2}{(a-2b)^2+4c^2},\frac{2ac(a-2b)}{(a-2b)^2+4c^2}\right)$$

を得る．以下，$A=(a-2b)^2+4c^2$ としよう．このとき，

$$\begin{aligned}
HD^2 &= \left(\frac{4ac^2}{A}-b\right)^2+\left\{\frac{2ac(a-2b)}{A}-c\right\}^2\\
&= \frac{16a^2c^4}{A^2}-\frac{8abc^2}{A}+b^2+\frac{4a^2c^2(a-2b)^2}{A^2}-\frac{4ac^2(a-2b)}{A}+c^2 \quad (\cdots ⑩)\\
&= \frac{4a^2c^2\{(a-2b)^2+4c^2\}}{A^2}-\frac{8abc^2+4ac^2(a-2b)}{A}+b^2+c^2\\
&= b^2+c^2\\
&= AD^2.
\end{aligned}$$

ゆえに，$AD=HD$.

㋑ ㋺ より $AD = HD$ が成立する．（終）

$AD^2 = b^2 + c^2$ なので，⑩ の時点で「b^2 と c^2 以外の項はキャンセルされそうだ」と見当をつけながら計算するとよい．

例題 12.3 は初等的幾何の問題と見なすか，ベクトルの問題と見なすか，図形と方程式の問題と見なすかで処理の煩わしさがかなり変わることが実感できたかと思う．試験のときにパニックにならないよう，**普段からさまざまな解法に触れて**おいてほしい．

さて，抽象的考察を伴うベクトルの問題では正答率はもちろん解答率も下がりやすい．次の例題はその類ではないだろうか．

例題 12.4. 空間上に相異なる 4 点 A, B, C, D が同一平面上に存在しないように与えられている．このとき，次を見たす点 P は存在するか．理由をつけて答えよ．

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP}$$

（2010 年，東北大，改題）

機械的に式を処理して混乱したのだろうかと思しき答案もときどき見られる．次の例はその典型と言えよう．

題意の点 P があるとすると，

$$\text{与式} \iff \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{BP} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \quad \cdots ⑪$$

となり点 P が消えるので $\cdots$ ($\sharp$)

この答案では「解答者は ⑪ の意味を理解していなかったのでは」と見なされてしまい得点がつきにくい．例題 12.4 は与式のみでは意味を成さない．その前の「相異なる 4 点 A, B, C, D が同一平面上に存在しない」という条件と組み合わせて解く問題である．⑪ 以降は次のように修正される．

⑪ より二線分 AC, DB は平行でかつ長さが等しい．しかも，四点 A, B, C, D は相異なるので四角形 $ACBD$ は平行四辺形となり，四点 A, B, C, D は同一平面上にある．これは四点 A, B, C, D が同一平面上にないことに反する．よって，与式を満たす点 P は存在しない．

正答はこのようになるものの腑に落ちない方も多かろう．そこで，座標空間上の原点 O と題意の点 A を重ねて，$\overrightarrow{AB} = (a, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (b, c, 0), \overrightarrow{AD} = (d, e, f)$ とする．ただし，相異なる 4 点 A, B, C, D は同一平面上に存在しないので a, c, f は正としてよい．このとき，$\overrightarrow{DB} = (a-d, -e, -f)$ なので ⑪ は $(b, c, 0) = (a-d, -e, -f)$ より $f = 0$. これは $f > 0$ に矛盾する．

また，⑪ を持ち出さなくとも例題 12.4 は次のように解かれる：

〈別解〉$\overrightarrow{AP}=(p,q,r)$ とすると $\overrightarrow{BP}=(p-a,q,r), \overrightarrow{CP}=(p-b,q-c,r), \overrightarrow{DP}=(p-d,q-e,r-f)$ なので，与式は $(2p-a,2q,2r)=(2p-b-d,2q-c-e,2r-f)$ と同義となる．よって，$2r=2r-f \iff f=0$ だが，これは $f>0$ に矛盾する．

抽象的発想が必要な場面でも具体的な場合に落とし込むことで解決方法が見えてくることもある．とくに一般論が苦手な人は一度試されたい．例題 12.4 の類題を挙げておく．まずは，四直線のうち三つが座標空間の x 軸，y 軸，z 軸である場合を考えてはどうだろうか．

問題 12.6. 空間の 1 点 O を通る 4 直線が，どの 3 つも同一平面上にないよう与えられている．このとき，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ．

（2008 年，京大・理系，前期）

13 題意を満たす点は必ず答の軌跡や領域に含まれる

例えば，「座標平面上の原点 $O(0,0)$ に対し，$OP=1$ となる点 P の軌跡を図示せよ」と言われて点 $A(1,0)$ が答に含まれないことがあるだろうか．軌跡や領域を求める問題は多いが，いくつかの点を確認するだけでミスが防げる場合がある．

13.1 基本

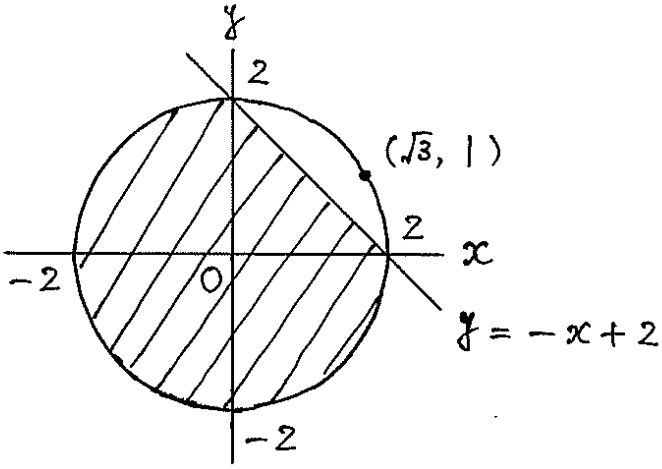
例題 13.1. 次の連立不等式の表す領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 & \cdots ① \\ x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3} \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

（2009 年，芝浦工業大）

計算に慣れてくると**いくつかに分けるべき計算過程を一つに省略しがち**であるが，それが計算ミスの原因となることもある．

② $\Leftrightarrow y \leqq -x+2$ (★) より求める領域は下図の斜線部分（境界を含む）．



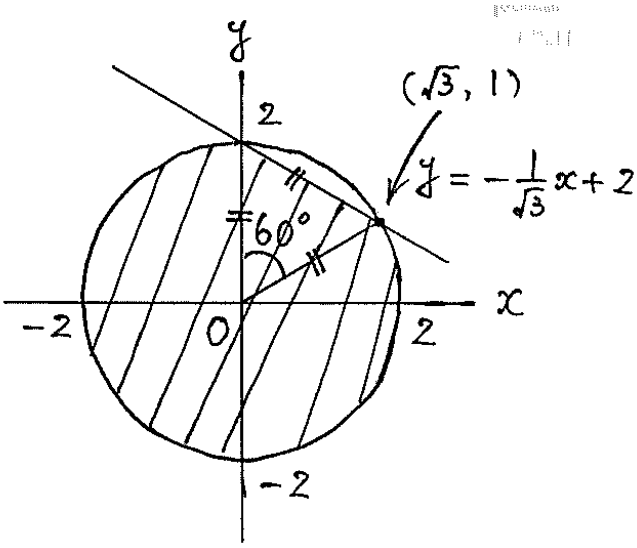
よって，求める面積は $\pi \cdot 2^2 \cdot (3/4) + (1/2) \cdot 2 \cdot 2 = 3\pi + 2$.

$(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ は $y \leqq -x + 2$ を満たさないので，上記斜線部分外にある．一方，①, ② に代入すると，

$$①: (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4, \quad ②: \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0,$$

と両方とも満たされておりおかしい．さらに，同等とされた ② と (★) で不等式の成否が分かれているので，② と (★) の間でミスが生じたことも分かる．ここから，次のように立て直される．

② $\Leftrightarrow y \leqq -(1/\sqrt{3})x + 2$ なので，答の領域は下図斜線部分の通り（境界を含む）．



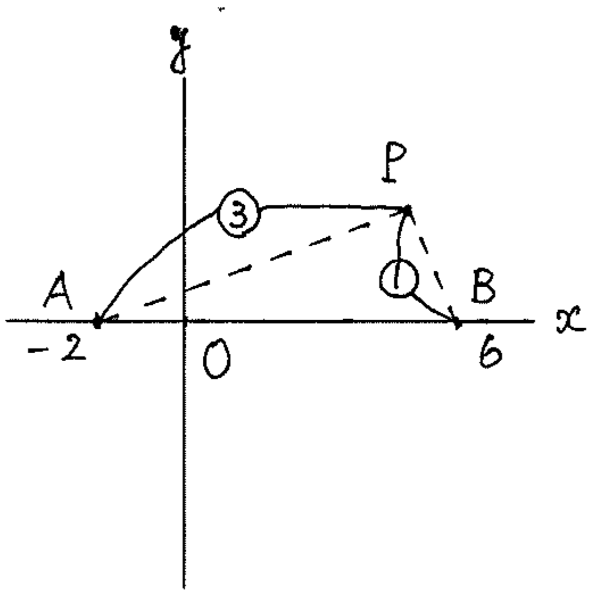
正解は $\pi \cdot 2^2 \cdot (5/6) + (1/2) \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = (10/3)\pi + \sqrt{3}$.

確実な検算方法ではないが，しないよりかは余程ましであることも理解してもらえたか

と思う．たとえ不確実な方法であっても検算を行って，**ミスの確率を減らすことで正解の確率を増やす**姿勢を身に付けてほしい．

答がある軌跡になるような問題では，条件を満たす任意の点が答の軌跡上になければならない．次の例題で検証しよう．

例題 13.2. 点 $A(-2,0)$ と $B(6,0)$ からの距離の比が $3:1$ となるような点 P の軌跡を求めよ．



（2008 年，龍谷大）

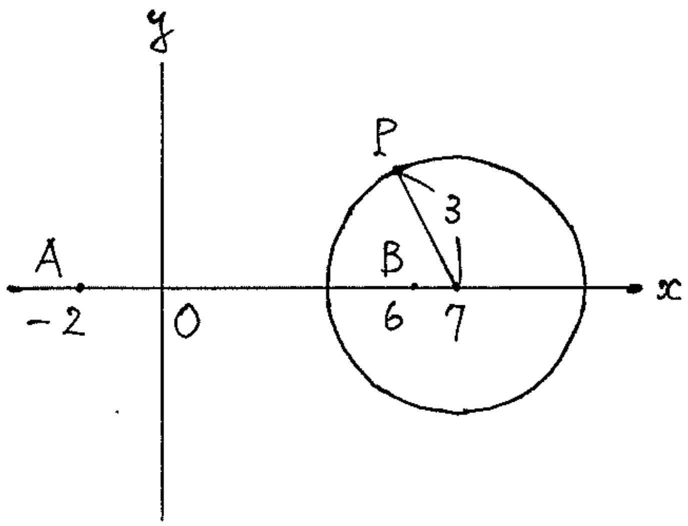
有名な**アポロニウスの円**の問題であるが，下記のように**比率を二乗し忘れた**誤答はありがちである．

> 三平方の定理より $AP^2=(x+2)^2+y^2$, $BP^2=(x-6)^2+y^2$. また，題意より $AP^2=3BP^2$ (★) なので
>
> $$(x+2)^2+y^2=3\{(x-6)^2+y^2\}\iff(x-10)^2+y^2=48(=(4\sqrt{3})^2).\quad\cdots③$$
>
> よって，求める点 P の軌跡は点 $(10,0)$ を中心とした半径 $4\sqrt{3}$ の円である．

線分 AP と線分 BP の式は確かなので部分点は少しもらえるかもしれない．しかし，**本来なら取れる点数を取りこぼすことは大変もったいない．**点 $C(4,0)$ は線分 AB を $3:1$ に内分するから，答の軌跡は必ず点 C を通らなければならない．しかし，③ に $(x,y)=(4,0)$ を代入すると，③ の左辺 $=6^2+0^2=36\neq48$ となり不適．さらに，このとき $AP^2=6^2=36$, $BP^2=2^2=4$ だが $AP^2=36\neq3BP^2=12$ から $\underline{AP^2=9BP^2}$ とすべきであったことが分か

る．ここに気付くと次のように立て直せるだろう．

$AP^2 = 9BP^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 9\{(x-6)^2 + y^2\}$. これを整頓すると $(x-7)^2 + y^2 = 9$ (···④). よって，求める軌跡は点 (7,0) を中心とする半径 3 の円である．



次の確認は読者の演習問題としよう．

問題 13.1. (1) 線分 AB を $3:1$ に内分する点 $C(4,0)$ が ④ 上にあることを確認せよ．

(2) 線分 AB を $3:1$ に外分する点を求め，それが ④ 上にあることを確認せよ．

(3) (1)(2) 以外に $AP:PB = 3:1$ を満たす点 P を一つ求め，それが ④ 上にあることを確認せよ．

複素数を用いた次の別解もある．まず，次を証明されたい．

問題 13.2. 任意の複素数 w, u, v に対して, 次の等式を示せ：$|w|^2 = w\bar{w}$, $\overline{u+v} = \bar{u}+\bar{v}$, $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$.

〈別解〉 $AP = |z+2|$, $BP = |z-6|$ なので問題 13.2 の結果から

$$\begin{aligned}
AP^2 = 9BP^2 &\Leftrightarrow |z+2|^2 = 9|z-6|^2 \\
&\Leftrightarrow (z+2)(\bar{z}+2) = 9(z-6)(\bar{z}-6) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4 = 9z\bar{z}-54z-54\bar{z}+324 \\
&\Leftrightarrow z\bar{z}-7z-7\bar{z}+40 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-7)(\bar{z}-7) = 9 \\
&\Leftrightarrow |z-7| = 3.
\end{aligned}$$

これは点 7 を中心とした半径 3 の円に他ならない．

例題 13.2 には幾何的別解も存在する．こちらは誘導付き演習問題にしておく．

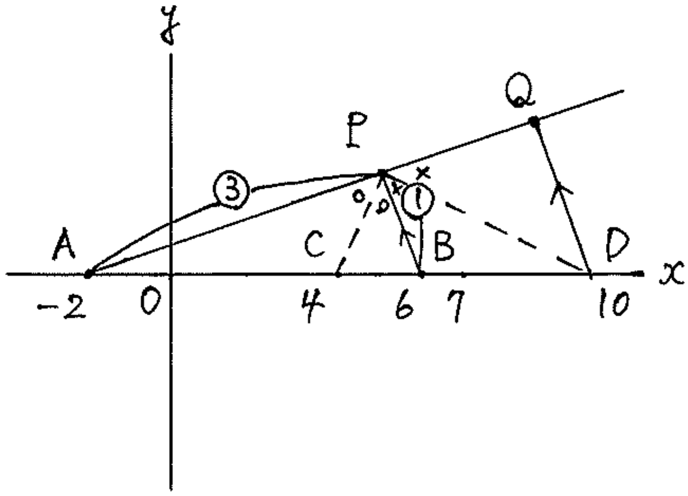
問題 13.3. 例題 13.2 において，点 P を二点 $C(4,0)$, $D(10,0)$ 以外の点とする．

(1) $\angle APC = \angle BPC$ を示せ．

(2) 点 D を通り直線 BP に平行な直線と直線 AP の交点を Q とする．$\angle QPD = \angle BPD$ を示

せ.

(3) 点 P は線分 CD を直径とする円上にあることを示せ.



上記にて紹介した三つの解法は二点 A, B の位置や AP/BP の比に関わらず成立する．例題 13.2 を改造して挑戦すると良い訓練になるだろう.

13.2　応用

杓子定規な手法に囚われるとうまく解けないトリッキーな応用問題は難関大の入試問題によく見られる.

例題 13.3. z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が線分 AB を斜辺とする直角三角形になるような z の範囲を求めて図示せよ.

（2016 年，東大・理科，改題）

次のような誤答を見ると，適宜工夫をしながら計算する必要を感じる.

> $z = x + yi$（x, y は実数）とする．このとき $AB^2 = |z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2$．$z^2 = (x+yi)^2 = (x^2-y^2) + 2xyi$ より $BC^2 = |z^2 - z|^2 = (x^2-y^2-x)^2 + y^2(2x-1)^2$, $CA^2 = |z^2-1|^2 = (x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2$. 三平方の定理から $AB^2 = BC^2 + CA^2$ なので
>
> $$(x-1)^2 + y^2 = (x^2-y^2-x)^2 + y^2(2x-1)^2 + (x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2. \cdots ⑤$$
>
> $Y = y^2 (\geqq 0)$ として整理すると
>
> $$Y^2 + (2x^2-x+1)Y + (x^4-x^3-x^2+x) = 0. \cdots ⑥$$

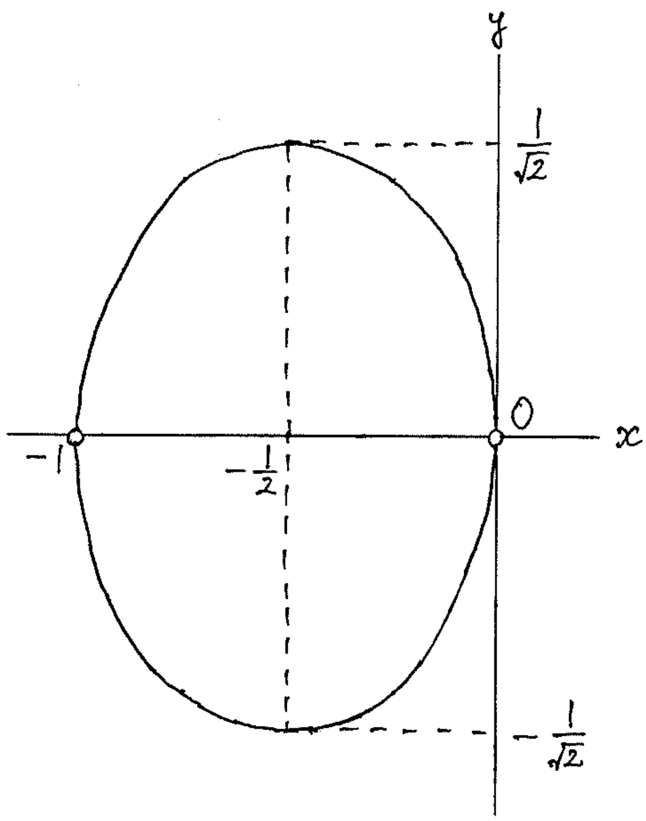
これを Y の二次方程式と思って解の公式で解くと，

$$\begin{aligned} Y &= -(2x^2-x+1) \pm \sqrt{(2x^2-x+1)^2-4(x^4-x^3-x^2+x)}\ (\bigstar) \\ &= -(2x^2-x+1) \pm \sqrt{(3x-1)^2}(= ⑦) \\ &= -2x^2+4x-2 \text{ または } -2x^2-2x. \end{aligned}$$

$-2x^2+4x-2=-2(x-1)^2 \leqq 0$ より $Y=-2x^2+4x-2 \Leftrightarrow x=1$ かつ $y=0 \Leftrightarrow z=1 \Leftrightarrow A=B$ となるから不適．よって，

$$Y=-2x^2-2x(= ⑧) \Leftrightarrow y^2+2x^2+2x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

ただし，$x=y=0 \Leftrightarrow z=0$ のときは $B=C$ となり，$x=-1$ かつ $y=0 \Leftrightarrow z=-1$ のときは $C=A$ となるので不可．答は次の図の通りである（中抜きの点を除く）．



最後の方程式は $x=-(1/2)$ かつ $y=1/\sqrt{2}$（つまり $z=-(1/2)+(1/\sqrt{2})i$）のときに成立する．しかし，このとき $AB^2=11/4, BC^2=33/16, CA^2=33/16$ なので，

$$AB^2=\frac{11}{4} \neq \frac{33}{16}+\frac{33}{16}\left(=\frac{33}{8}\right)=BC^2+CA^2$$

となって三平方の定理が成立しない．つまり，三角形 ABC は辺 AB を斜辺とする直角三角形にならない．

上記の答が正しくないことは分かった．では，どこで誤ったのだろうか．要所となる式に番号を振って $x=-(1/2)$ かつ $y=1/\sqrt{2}$ のときに検証してみよう．まず，⑤ の左辺は 11/4, 右辺は 33/8 なので ⑤ は成立しない．$Y=y^2=1/2$ に注意すると，⑥ の左辺は 11/16, 右辺は 0 なのでこれも成立しない．さて，(★) と ⑦ は $-(9/2)$ または 1/2 となるので成立する．⑧ は両辺とも 1/2 に等しく成立している．

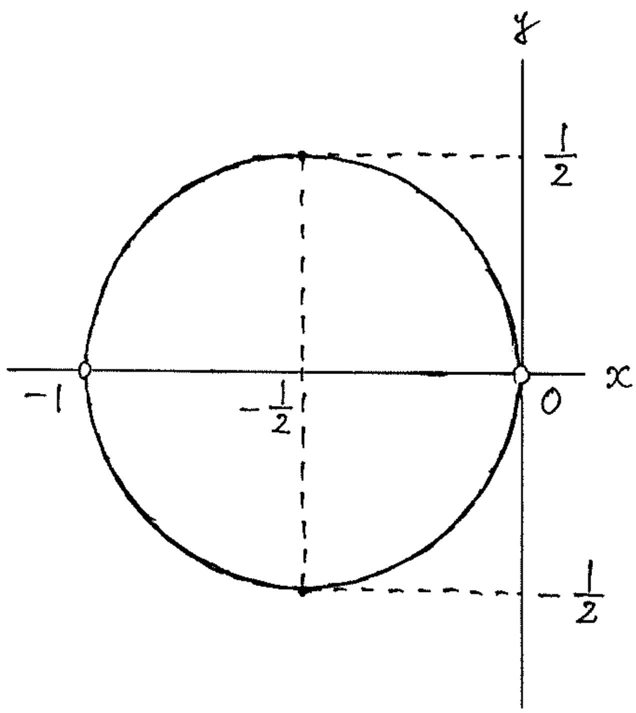
よって，**少なくとも⑥ と (★) の間でミスが生じたと言える．** 実際，(★) のくだりは次が正しい：

$$Y=\frac{1}{2}\left\{-(2x^2-x+1)\pm\sqrt{(2x^2-x+1)^2-4(x^4-x^3-x^2+x)}\right\}$$

つまり，$Y=-x^2+2x-1$ または $-x^2-x$．これ以降は誤答例の方法で良いであろう：$Y=y^2\geqq 0$ かつ $-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqq 0 \Leftrightarrow z=1$ より $y^2=-x^2-x$ が得られる．これを整理すると

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

ただし，$x=y=0\Leftrightarrow z=0$ のときは $B=C$ となり，$x=-1$ かつ $y=0\Leftrightarrow z=-1$ のときは $C=A$ となるので不可．正解は次の図の通りである（中抜きの点を除く）．



上記失敗の原因はいろいろ考えられるが，その一つは ⑥ の二次方程式を解の公式を使って解いていることである．この方法でも計算はできるが，煩雑になるので濫用は避けたい．例えば，たすきがけの方法ではどうだろうか．

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - x^2 + x &= x^3(x-1) - x(x-1) \\ &= x(x+1)(x-1)^2 \\ &= (x^2-2x+1)(x^2+x) \end{aligned}$$

でかつ $(x^2-2x+1)+(x^2+x) = 2x^2-x+1$ なので ⑥ は

$$\{Y + (x^2-2x+1)\}\{Y + (x^2+x)\} = 0$$

となる．以後は上記修正済解答に同じなので省略する．

他の失敗の原因としては**早い段階で約分を済ませておくべき**だったことが考えられる．⑤ がいやに汚い式になった原因もここにある．次の別解で見てみよう．

〈別解 1〉 $AB^2 = |z-1|^2$, $BC^2 = |z^2-z|^2 = |z|^2|z-1|^2$, $CA^2 = |z^2-1|^2 = |z+1|^2|z-1|^2$．一方，$z \neq 1$ なので $|z-1| > 0$. よって，三平方の定理から

$$\begin{aligned} AB^2 = BC^2 + CA^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-1|^2 = |z|^2|z-1|^2 + |z+1|^2|z-1|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = |z|^2 + |z+1|^2 \quad (\cdots \text{Ⓐ}) \\ &\Leftrightarrow \quad z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

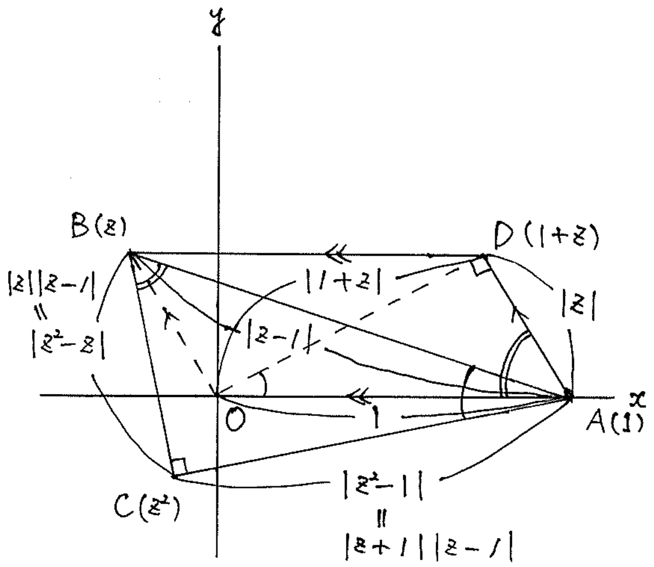
ただし，$z = 0, -1$ のときはそれぞれ $B = C, C = A$ となる．答は既出なので略．

別解 1 では問題 13.2 の結果を利用したが，Ⓐ から $z = x + yi$（x, y は実数で $i = \sqrt{-1}$）としても良い．詳細は演習問題に残しておく．

問題 13.4. Ⓐ にて $z = x + yi$（x, y は実数で $i = \sqrt{-1}$）として例題 13.3 を解け．

また，三角形の相似を利用した次の別解もある．かなりスマートではあるが簡単には思いつかない．

〈別解 2〉 $AB : BC : CA = |z-1| : |z^2-z| : |1-z^2| = 1 : |z| : |1+z|$. よって，複素数平面上で四角形 $OADB$ が平行四辺形となる点 $D(1+z)$ をとれば，$OA : AD : DO = 1 : |z| : |1+z| = AB : BC : CA$. 三辺の比が等しいから三角形 ABC は三角形 OAD と相似である．ゆえに，三角形 OAD が OA を斜辺とする直角三角形となる点 D の分布を考えれば良い．つまり，線分 OA を直径とする円周のうち二点 O, A を除いた部分が点 D の分布となる．点 B は点 D を実軸方向に -1 だけ平行移動したものであるから，答は既述の通り．



なかなか思いつかない解ではあるが，図を描いた上で出題者の意図をしっかりと汲めば意外とすんなり解かれることには気づいたのではないだろうか．ちなみに，例題 13.3 のオリジナルは次の通りだった．

問題 13.5. z を複素数とする．複素数平面上の三点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

（2016 年，東大・理科・前期）

また，例題 13.3 と似たようなタイプの問題を挙げておく．因数分解を活用するとかなり計算が楽である．

問題 13.6. xy 平面上の曲線 $C : y = x^3$ 上の点 P における接線を，点 P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする．C と L が相異なる三点で交わるような点 P の範囲を図示せよ．

（2001 年，京大・理系・前期）

次に，**「すべての○○」を「ある○○」に変えるだけで内容がまったく異なる**ことは日常生活でもよくあるが，入試問題での事例を紹介しておく．

例題 13.4. 実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ $(\cdots⑨)$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく．

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (x, y) の範囲を図示せ

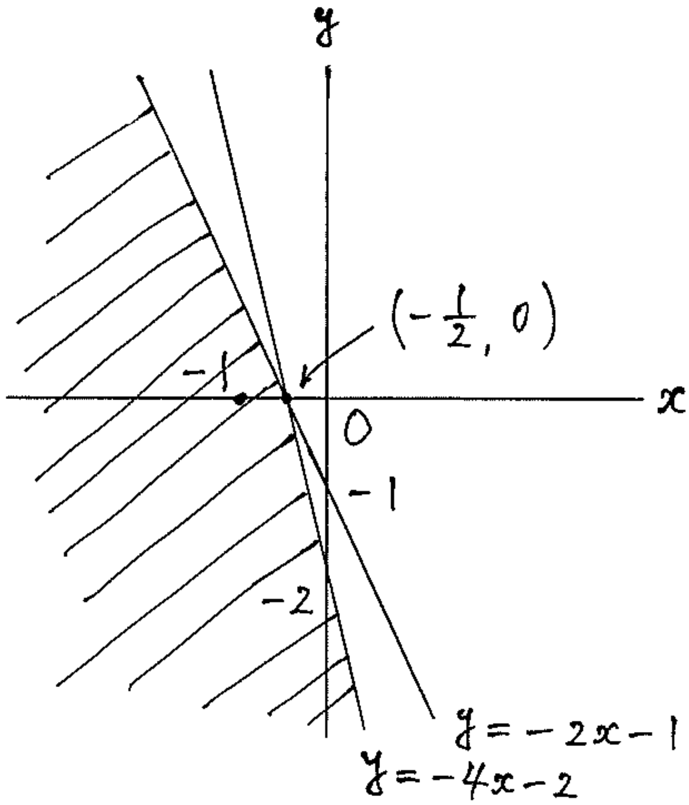
よ．
(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすある a に対し $D(a)$ の点となるような点 (x, y) の範囲を図示せよ．

（2011 年，東北大・理系・前期，改題）

係数や不等号を間違えただけで答が明後日の方へ行く例を示そう．

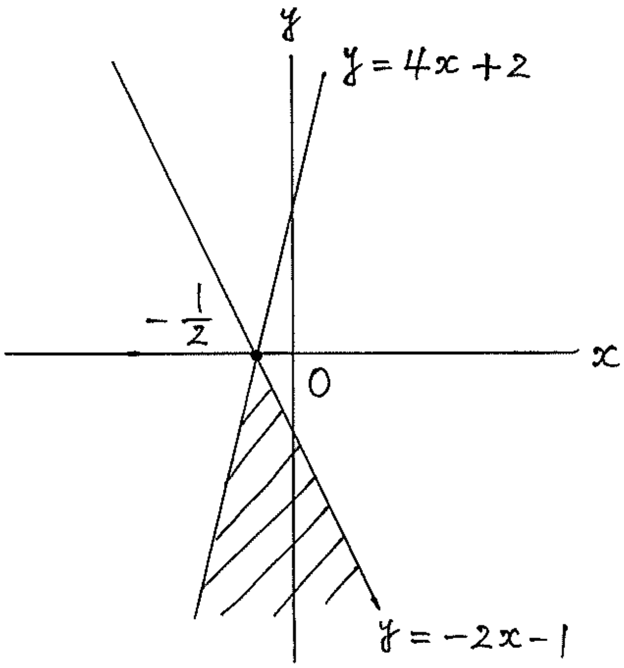
$$⑨ \Leftrightarrow a^2-2(x+1)a+(y-2)(=f(a)) \leqq 0(\cdots ⑩)$$

$z=f(a)$ は下に凸の放物線をグラフにもつので，$f(-1)=y+2x+1 \leqq 0 \Leftrightarrow y \leqq -2x-1$ かつ $f(2)=-4x+y-2 \leqq 0 \Leftrightarrow y \leqq -4x-2(\bigstar)$ を満たす (x, y) の範囲が答の領域である．したがって，求める領域は下図斜線部分（境界を含む）．



$(x, y)=(-1, 0)$ は答の領域に入っている．図からも明らかであるし，誤答の不等式に代入しても成立する．しかし，⑨ に代入すると $-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ となる．題意から答の領域内のすべての (x, y) に対して得られる a の範囲は $-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲を含んでいなければならない．⑩ に代入しても同じく $-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ となる．⑩ で間違えた可能性は低い（実際には間違えていない）．

そこで，$f(-1)$ と $f(2)$ の式で誤りが生じた可能性を考える．⑨ に $(x,y,a)=(-1,0,-1)$ を代入すると，左辺は 0, 右辺は 1 となり成立する．一方，$(x,y,a)=(-1,0,2)$ を代入すると，左辺は 0, 右辺は -2 となり成立しない．$f(2)$ の式に誤りがある：$f(2)\leqq 0 \Leftrightarrow y \leqq 4x+2$ とするべきであった．正解は下図の通りである（境界は含む）.



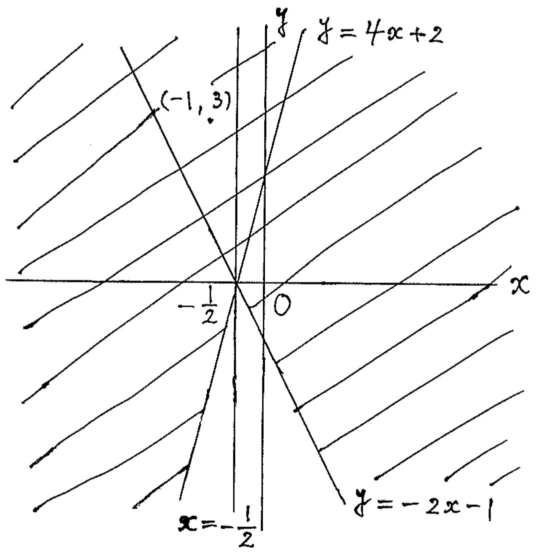
(2) についても誤答例を一つ紹介しよう．

⑨ $\Leftrightarrow a^2-2(x+1)a+y-2(=f(a))\geqq 0(\bigstar)$ $(\cdots ⑪)$ でかつ $f(a)=\{a-(x+1)\}^2-(x+1)^2+y-2$.

(i) $x+1\leqq 1/2 \Leftrightarrow x\leqq -1/2$ のとき，$f(2)=-4x+y-2\geqq 0 \Leftrightarrow y\geqq 4x+2$.

(ii) $x+1\geqq 1/2 \Leftrightarrow x\geqq -1/2$ のとき，$f(-1)=y+2x+1\geqq 0 \Leftrightarrow y\geqq -2x-1$.

(i) (ii) より答は下図斜線部分（境界含む）.



図を描くことを怠ると誤答を誘発することはこの例からも分かってもらえたかと思う．しかし，どこがなぜ誤りかを指摘できないと修正は困難である．問題文から (1) の条件を満たす点 (x,y) は (2) の条件も満たす．よって，**(1) の答の領域は (2) のそれにまるごと含まれるはず**である．この時点で上記の誤答が駄目であることは確実である．

そこで，誤答の領域に含まれる $(x,y)=(-1,3)$ を ⑨, ⑪ に代入し，双方の解の範囲にずれがないか確認してみる．このとき，⑨ $\Leftrightarrow a^2+1 \leqq 0$ となり実解 a が存在せず，⑪ $\Leftrightarrow a^2+1 \geqq 0$ となりすべての実数 a が解になる．よって，⑪ が誤りで，正しくは $f(a) \leqq 0$ とするべきである．また，$(x,y)=(-1,3)$ **は正解の領域には含まれない．**ここから先の修正は演習問題としておく．誘導を付けておくので読者にて修正を試みられたい．

問題 13.7. 例題 13.4 の条件にて，

(1) $x+1 \leqq -1 \Leftrightarrow x \leqq -2$ のとき，題意を満たす (x,y) の条件を求めよ．

(2) $-1 \leqq x+1 \leqq 2 \Leftrightarrow -2 \leqq x \leqq 1$ のとき，題意を満たす (x,y) の条件を求めよ．

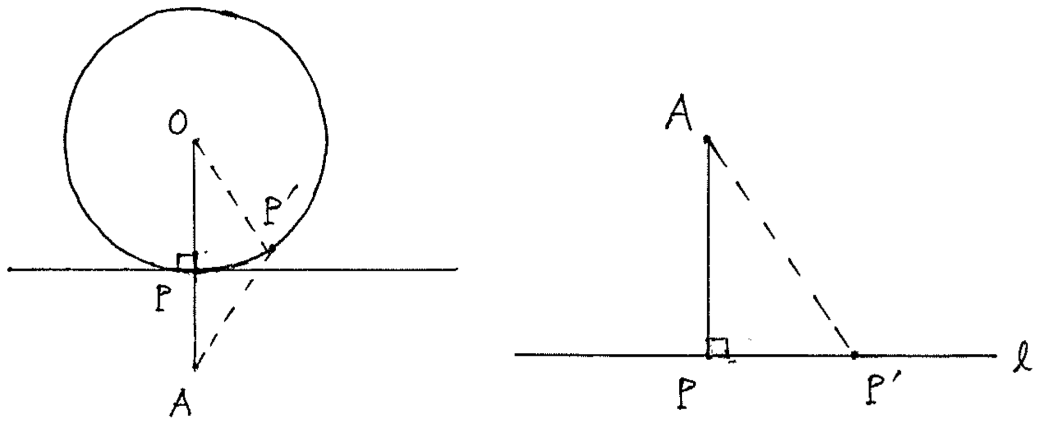
(3) $2 \leqq x+1 \Leftrightarrow 1 \leqq x$ のとき，題意を満たす (x,y) の条件を求めよ．

(4) (1)〜(3) の答をもとに例題 13.4 (2) の正解の領域を図示せよ．また，その答が例題 13.4 (1) の正解の領域をすべて含むことを確認せよ．

頭から尻尾まで完全に整った解答を書き上げる練習も良いが，限られた試験時間内に誤った箇所だけを直す練習も大切であることも忘れないでほしい．

14　与曲線上の点とその外定点を結ぶ距離最小の線分はその曲線の法線の一部

一般論で上記のように言われると戸惑う人もいるかと思うが，円や直線を例に考えると下図の通り直観的には明らかである（厳密には読者の演習問題とする）．本節では主に具体的事例に即して見てみよう．



問題 14.1. (1) 円 O 上の点 P とその外定点 A について，線分 AP の長さが最小になるための必要十分条件は直線 AP が円 O の法線であることを示せ．
(2) 直線 l 上の点 P とその外定点 A について，線分 AP の長さが最小になるための必要十分条件は直線 AP が l と直交することを示せ．

14.1　基本

まずは教科書レベルの問題から．

例題 14.1. 曲線 $C : y = x^2$ の点 $A(1,1)$ における法線の方程式を求めよ．

面倒でも題意を的確につかむために図を描くべきである．これを怠ると次のようにとんでもない結果になるかもしれない．

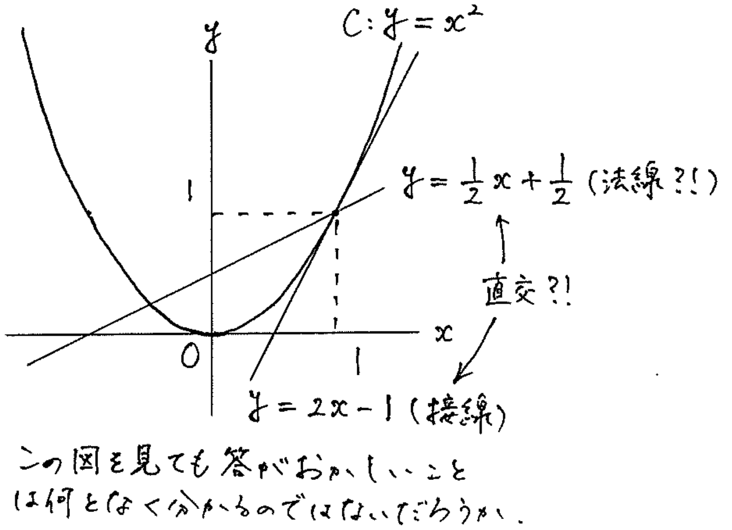
> $(x^2)' = 2x$ だから点 A での C の接線の傾きは 2. よって，題意の法線の傾きは 1/2 (★). よって，求める方程式は $y = (1/2)(x-1)+1 \Leftrightarrow y = (1/2)x+(1/2)(\cdots①)$.

法線の傾きは接線の逆数の -1 倍というルールを誤用したのだろうか．もし，① が答なら，点 $B(3,2)$ は ① 上にあるので，点 B と曲線 C 上の点 $P(p,p^2)$ の距離の最小値は $AB = \sqrt{5}$ でなければならない．しかし，これは次の反例で簡単に否定される：点

$D(3/2, 9/4)$ は曲線 C 上にあるが $BD = \sqrt{37}/4$ である．

問題 14.2. このことを確認せよ．

前記誤答が正しいならば $AB < BD \Leftrightarrow \sqrt{5} < \sqrt{37}/4$ のはずだが，$\sqrt{5} < \sqrt{37}/4 \Leftrightarrow 4\sqrt{5}(= \sqrt{80}) < \sqrt{37}$ となり無理が生じる．今の状況を図示すると次のようになる．



さて，どこで間違えたのだろうか．例題 14.1 のポイントは

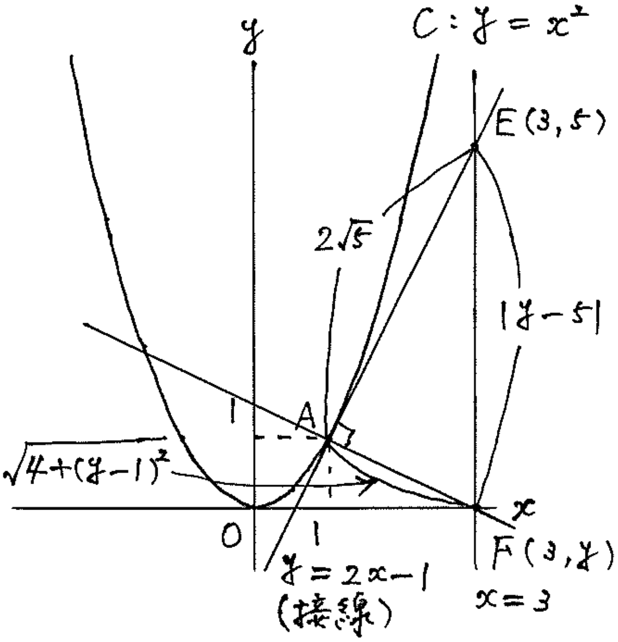
- Ⓐ: 点 A での曲線 C の接線の傾きを正しく求められ，
- Ⓑ: 求める法線の方程式を正しく求められるか

の二つである．Ⓐ で誤ったならば，$y = 2(x-1)+1 \Leftrightarrow y = 2x-1(\cdots②)$ は $C: y = x^2$ と重解をもたないはずである．しかし，今の場合は $(x, y) = (1, 1)$ が重解となる．

問題 14.3. このことを確認せよ．

したがって，Ⓑ で誤ったことになる．せっかく接線の方程式を求めたので，今回はこれを用いて誤答を立て直してみよう．

接線 ② 上に点 $E(3, 5)$ をとる．また，点 E を通って y 軸に平行な直線上に点 $F(3, y)$ をとり，$\angle EAF = 90^\circ$ となるようにする．**接線と法線は直交する**ので，y の値が分かれば直線 AF の方程式が分かる．



$AE = 2\sqrt{5}$, $EF = |y-5|$ かつ $AF = \sqrt{4+(y-1)^2}$ より三平方の定理から

$$(2\sqrt{5})^2 + |y-5|^2 = (\sqrt{4+(y-1)^2})^2.$$

これを解くと $y = 0$. よって，直線 AF の傾きは $(0-1)/(3-1) = -1/2$. ゆえに，正解は $y = -(1/2)(x-1)+1 \Leftrightarrow y = -(1/2)x+(3/2)$.

また，$AF = \sqrt{4+(-1)^2} = \sqrt{5}$ なので，FP^2 の最小値は 5 でなければならない．次の演習問題で確認されたい.

問題 14.4. $FP^2 = (p-3)^2 + (p^2)^2 = p^4 + p^2 - 6p + 9$ の最小値は 5 であることを示せ.

与えられた曲線が双曲線の一部ならばどうだろうか.

例題 14.2. 曲線 $H : y = \sqrt{x^2+1}$ 上の点 $P(p, \sqrt{p^2+1})$ と点 $A(0, 8)$ の距離 AP の長さの距離の最小値とその時の p の値を求めよ.

解法は簡素だがありがちな計算ミスにより手詰まりになった例を挙げる.

> $AP^2 = p^2 + (\sqrt{p^2+1} - 8)^2 (= f(p))$ の最小値を求めれば良い．$f(p) = 2p^2 - 16\sqrt{p^2+1} + 65$ なので
>
> $$f'(p) = 4p - 16 \cdot \frac{2p}{\sqrt{p^2+1}} (\bigstar) = \frac{4p(\sqrt{p^2+1}-8)}{\sqrt{p^2+1}}.$$

よって，増減表は下の通りとなり

p	$\cdots$	$-3\sqrt{7}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$3\sqrt{7}$	$\cdots$
$f'(p)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(p)$	$\searrow$	63	$\nearrow$	49	$\searrow$	63	$\nearrow$

・・・ $(\sharp)$.

上記増減表を見れば解答がおかしいことは明らかである．また，間違えたと思しき箇所は大きく分けると次の二つである．

- Ⓒ: $f(p)$ を p の式で表すまで．
- Ⓓ: $f'(p)$ を求めるくだり以降．

Ⓒ に関しては $f(0) = 49(= 7^2)$ や $f(1) = 67 - 16\sqrt{2}(= 1^2 + (8 - \sqrt{2})^2)$ が成立することから誤りの可能性は低い（実際，間違いではない）．Ⓓ での誤りを疑うべきであろう．$(\bigstar)$ の式を p で不定積分すると**定数部分以外は** $f(p)$ **に一致するはず**である．ところが，$2p = (p^2 + 1)'$ なので，

$$\int 4p - 16 \cdot \frac{2p}{\sqrt{p^2+1}} dp = 2p^2 - 16 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot (p^2+1)^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2p^2 - 32\sqrt{p^2+1} + C$$

となり，$\sqrt{p^2+1}$ の係数が合わない．正しくは

$$f'(p) = 4p - 16 \cdot \frac{1}{2}(p^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p = 4p(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}\{(p^2+1)^{\frac{1}{2}} - 4\}$$

であり，増減表は次の通り修正される．

p	$\cdots$	$-\sqrt{15}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{15}$	$\cdots$
$f'(p)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(p)$	$\searrow$	31	$\nearrow$	49	$\searrow$	31	$\nearrow$

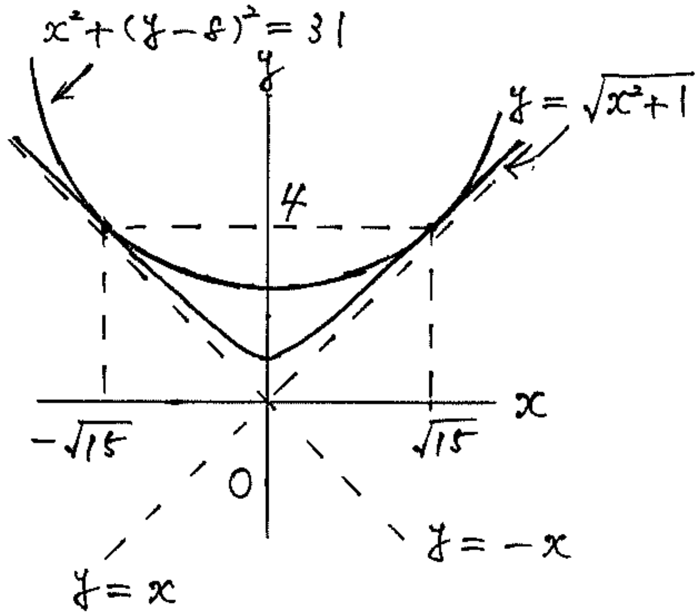
したがって，真の $f(p)$ の最小値は $p = \pm\sqrt{15}$ のときの 31 である．よって，$p = \pm\sqrt{15}$ のとき線分 AP の長さは最小値 $\sqrt{31}$ をとる．

微分を使わずに上記誤答を立て直すこともできる：$q = \sqrt{p^2+1}(\geqq 1)$ とおくと，$f(p) = 2q^2 - 16q + 63 = 2(q-4)^2 + 31$ なので，$q = 4(\Leftrightarrow p = \pm\sqrt{15})$ のとき $f(p)$ は最小値 31 をとる．微分が苦手な人はこのように微分を回避して問題を解く工夫もしてほしい．

AP の長さの最小値が $\sqrt{31}$ であることは次のようにしても確かめられる．点 A を中心とした半径 $\sqrt{31}$ の円の方程式は $x^2 + (y-8)^2 = 31$. これと $H : y = \sqrt{x^2+1}$ を連立して解けば得られる解は $(x, y) = (\pm\sqrt{15}, 4)$ のみのはず．

問題 14.5. このことを確かめよ．

この発想を少し延長すれば例題 14.2 の別解が得られる．



〈別解〉 点 A を中心とした半径 $r(>0)$ の円 $x^2+(y-8)^2=r^2$ が題意の双曲線 H と接するような r の値を求めれば良い．これら二つの曲線の y 軸に関する対称性から，それらの方程式を連立して x を消去した y の二次方程式 $2y^2-16y+63-r^2=0$ の判別式を D とすると，$D/4=64-2(63-r^2)=0 \Leftrightarrow r=\sqrt{31}$.

また，線分 AP が最小になるときに直線 AP が H の法線になることを利用すると，上記正解の確認ができるだろう．

問題 14.6. $p=\pm\sqrt{15}$ のとき直線 AP の傾きと点 P での接線の傾きを求めて，それらの積が -1 になることを確認せよ．

14.2 応用

幾何的手法を用いるか否かで手間がまったく異なる例題を挙げておく．

例題 14.3. xy 平面において，点 $A(x_0, y_0)$ と直線 $l: ax+by+c=0$ 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ．ただし，x_0, y_0, a, b, c は実定数とする．

（2013 年，阪大・文系，改題）

図を描いて三平方の定理と点と直線の距離公式を応用した方が早いが，ここでは馬鹿正直に計算力頼みで突撃して誤答した例を見せよう．

$a=b=0$ のときは l は $c=0$ となり直線の方程式にならない．よって，この場合

は除外して良い．

㋑ $b=0$ だが $a\neq 0$ のとき，

直線 l の方程式は $x=-(c/a)$ となり，求める最小値は

$$\left|x_0-(-\frac{c}{a})\right|=\left|x_0+\frac{c}{a}\right|$$

となる．

㋺ $b\neq 0$ のとき，

直線 l の方程式は $y=-(a/b)x-(c/b)$. 直線 l 上に点 $T(t,-(a/b)t-(c/b))$ をとるとき，線分 AT の長さの平方は

$$(t-x_0)^2+\left\{\left(-\frac{a}{b}t-\frac{c}{b}\right)-y_0\right\}^2 (=f(t)).$$

$f(t)$ は t の二次関数なので，平方完成して最小値を求めれば良い．

$$\begin{aligned}
&f(t)\\
=\ & t^2-2x_0t+x_0^2+\left\{\frac{a}{b}t+\left(\frac{c}{b}+y_0\right)\right\}^2 && (=③)\\
=\ & t^2-2x_0t+x_0^2+\frac{a^2}{b^2}t^2+\frac{2a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)t+\left(y_0+\frac{c}{b}\right)^2 && (=④)\\
=\ & \frac{a^2+b^2}{b^2}t^2-2\left\{x_0-\frac{a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)\right\}t+x_0^2+\left(y_0+\frac{c}{b}\right)^2 && (=⑤)\\
=\ & \frac{a^2+b^2}{b^2}\left[t^2-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\left\{x_0-\frac{a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)\right\}t\right]+x_0^2+\left(y_0+\frac{c}{b}\right)^2 && (=⑥)\\
=\ & \frac{a^2+b^2}{b^2}\left[t-\frac{b^2}{a^2+b^2}\left\{x_0-\frac{a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)\right\}\right]^2\\
& \underline{-\frac{b^4}{(a^2+b^2)^2}\left\{x_0-\frac{a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)\right\}^2+x_0^2+\left(y_0+\frac{c}{b}\right)^2}_{Ⓔ}\ (\bigstar) && (=⑦)
\end{aligned}$$

Ⓔ を整理すると，

$$\begin{aligned}
Ⓔ\ =\ & -\frac{b^4}{(a^2+b^2)^2}\left\{x_0^2-\frac{2a}{b^2}(by_0+c)x_0+\frac{a^2}{b^4}(by_0+c)^2\right\}+x_0^2+\frac{1}{b^2}(by_0+c)^2\\
=\ & \frac{a^2(a^2+2b^2)}{a^2+b^2}x_0^2+\frac{2ab^2}{(a^2+b^2)^2}(by_0+c)x_0+\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{b^2(a^2+b^2)^2}(by_0+c)^2
\end{aligned}$$

よって，求める最小値は

$$\frac{1}{a^2+b^2}\sqrt{a^2(a^2+2b^2)x_0^2+2ab^2(by_0+c)x_0+(a^4b^{-2}+a^2+b^2)(by_0+c)^2}(=⑧).$$

まず，$c\neq 0$ の場合にこの答が不自然である点を指摘しておく．㋺の結果にて $a\neq 0$ とした上で $b\to 0$ とすると，㋑ の結果に重なるのが自然である．しかし，⑧ によれば正の無限大に発散してしまう．

この計算ミスの原因の一つは**文字定数が多過ぎる**ことである．そこで，㊁ の場合について $x_0 = y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 1$ かつ $c = -4$ と**具体的場合に落とし込んで**上記誤答を見直してみよう．このとき，直線 l の方程式は $y = -2x+4$ となるので，$T = (t, -2t+4)$ となり，$AT^2 = t^2 + (-2t+4)^2 = 5t^2 - 16t + 16$ となる．このくだりまでは上記誤答にズレはない．③ 〜 ⑧ と Ⓔ が疑わしい．

③ 〜 ⑦ にて $x_0 = y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 1$ かつ $c = -4$ を代入し整頓すると，それぞれ必ず $5t^2 - 16t + 16$ になるはず．ところが，⑦ のみ

$$⑦ = 5\left[t - \frac{1}{5}\cdot(-2)\cdot(-4)\right]^2 - \frac{1}{25}\cdot(-2)^2\cdot(-4)^2 + 16 = 5t^2 - 16t + \frac{656}{25}$$

となり他の行と一致しない．よって，⑥ と ⑦ の間で一つミスが生じたのではと考えられる．⑦ は次のように修正されるべきである：

$$\underbrace{\begin{aligned}&\frac{a^2+b^2}{b^2}\left[t - \frac{b^2}{a^2+b^2}\left\{x_0 - \frac{a}{b}\left(y_0 + \frac{c}{b}\right)\right\}\right]^2\\ &-\frac{b^2}{a^2+b^2}\left\{x_0 - \frac{a}{b}\left(y_0+\frac{c}{b}\right)\right\}^2 + x_0^2 + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right)^2\end{aligned}}_{Ⓕ}.$$

以下，次のように立て直すことができる．

$$\begin{aligned}Ⓕ &= -\frac{b^2}{a^2+b^2}\left\{x_0^2 - \frac{2a}{b^2}(by_0+c)x_0 + \frac{a^2}{b^4}(by_0+c)^2\right\} + x_0^2 + \frac{1}{b^2}(by_0+c)^2\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\{a^2x_0^2 + 2a(by_0+c)x_0 + (by_0+c)^2\}\\ &= \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

したがって，求める最小値は $|ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2+b^2}$.

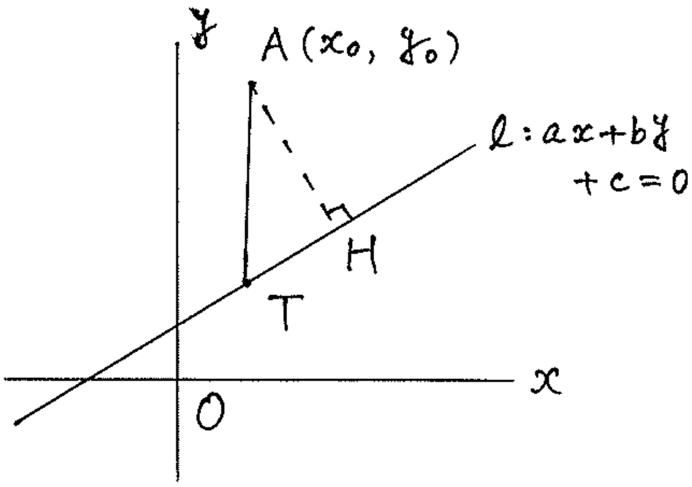
この結果にて $a \neq 0$ とした上で $b \to 0$ とすると ㋑ の結果に収束する．

問題 14.7. このことを確かめよ．

上記では例題 14.3 を二次関数の平方完成によって解いたが，微分を用いても求められる．ただし，平方完成を用いた場合と同じく計算は煩雑である．

問題 14.8. $f'(t)$ を求めた上で例題 14.3 を $b \neq 0$ の場合に解け．

これまで見たように，例題 14.3 を計算のみで解こうとすると骨が折れる．そこで幾何的なアプローチが役に立つ．点と直線の距離公式を用いた次の別解はとても簡明である．



〈別解〉点 A が直線 l 上にあるとき（つまり，$ax_0+by_0+c=0$ のとき）は題意の最小値が 0 であることは明らか（$T=A$ のとき最小）．以下，点 A は直線 l 上にないとする．さて，点 A から図のように直線 l に垂線 AH を下ろす．$T\neq H$ のとき，三角形 ATH は $\angle H=90°$ の直角三角形なので，三平方の定理より $AT^2=AH^2+HT^2>AH^2$. よって，$AT>AH$. したがって，$T=H$ のとき線分 AT の長さは最小である．その最小値は点と直線の距離公式より $|ax_0+by_0+c|/\sqrt{a^2+b^2}$ である．

以上の検証から，$b\neq 0$ のとき，線分 AT の長さが最小になるときの直線 AT の傾きは $-(-a/b)^{-1}=b/a$ になる．この確認は読者の演習に残しておこう．

問題 14.9. 例題 14.3 において，$t=(b^2x_0-aby_0-ac)/(a^2+b^2)$ のとき直線 AT の傾きが b/a になることを示せ．ただし，$b\neq 0$ かつ $t\neq x_0$ とする．

これまで動点が一つである場合を紹介してきたが，動点が二つの場合はどうだろう．

例題 14.4. 楕円 $E:(x^2/12)+(y^2/4)=1$ 上の点 P と直線 $l:x+y=6$ 上の点 Q を結ぶ線分 PQ の長さの最小値とそのときの二点 P,Q の座標を求めよ．

高校程度の知識で何とかなる問題ではあるが，媒介変数を用いた解法による誤答を示しておく．

$P=(2\sqrt{3}\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q=(t, 6-t)$ とおく．このとき，

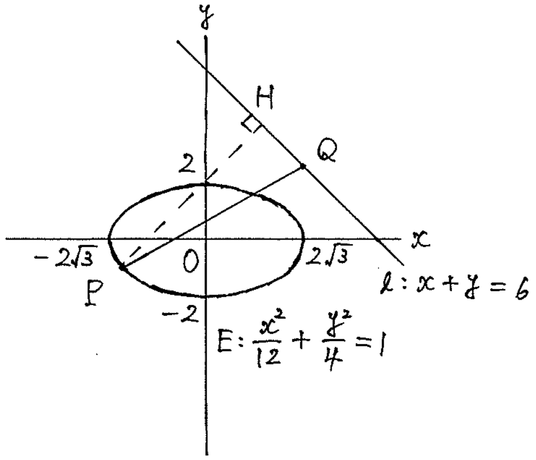
$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= (t-2\sqrt{3}\cos\theta)^2+\{(6-t)-2\sin\theta\}^2 && (=⑨)\\
&= t^2-4\sqrt{3}(\cos\theta)t+12\cos^2\theta+t^2-2(6-2\sin\theta)t+(6-2\sin\theta)^2 && (=⑩)\\
&= 2t^2-2(2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta+6)t+12\cos^2\theta+(2\sin\theta-6)^2 && (=⑪)\\
&= 2\left\{t-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\right\}^2-2(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)^2\\
&\quad +12\cos^2\theta+(2\sin\theta-6)^2 \quad (\bigstar) && (=⑫)\\
&= 2\left\{t-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\right\}^2+6\cos^2\theta+2\sin^2\theta+18\\
&\quad +4\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta-12\sqrt{3}\cos\theta-12\sin\theta && (=⑬)\\
&= 2\left\{t-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\right\}^2+2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2\\
&\quad -12(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)+18 && (=⑭)\\
&= 2\left\{t-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\right\}^2+2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-3)^2 && (=⑮)
\end{aligned}
$$

以下, $0\leqq\theta<2\pi$ としても良い．加法定理より $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-3=2\sin(\theta+(\pi/3))-3$. よって，$t=(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)/2$ かつ $\theta=\pi/6$ のとき，つまり $P=(3,1)$ かつ $Q=(2,4)$ のとき PQ は最小値 $\sqrt{2}$ をとる．

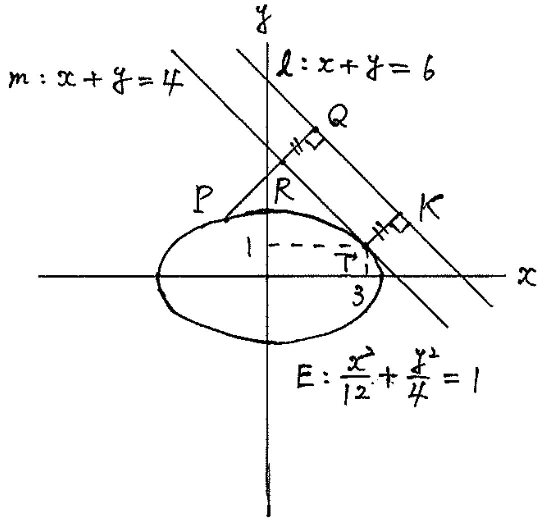
この誤答では PQ の最小値を ⑮ より出したのであろうが，その一方で「$P=(3,1)$ かつ $Q=(2,4)$」なので三平方の定理から $PQ=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$ である．さらに，この誤答に従うと PQ の方程式は $y=-3x+10$ となる．これは点 P での楕円 E の接線 $x+y=4$ と直交しない．確かに結果だけを見ると一部は正しいが，⑨ 以降の式変形がうまくいっておらず試験では減点を免れない．

例題 14.4 もしっかり図を描いて考察すれば⑨ 以降のような煩雑な式変形は不要であった．例えば，次のような別解があり得た．

〈別解〉 まず，楕円 E と直線 l の方程式を連立して y を消去して得られる x の二次方程式は $x^2-9x+24=0$. この方程式は判別式が $D=-15<0$ なので実解を持たない．よって，E と l は共有点をもたない．



次に二点 P, Q をそれぞれ E, l 上にでたらめにとる．点 P から l に垂線 PH を下ろす．このとき，$Q \neq H$ である限り，三角形 PQH は $\angle H = 90°$ の直角三角形なので三平方の定理から $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 > PH^2$. つまり，$PQ > PH$. したがって，直線 PQ が l に垂直な場合のみを考え，その下で PQ の長さが最小になるときを考えれば良い．以下，直線 PQ は直線 l と直交すると仮定する．



さて，直線 l に平行な楕円 E の接線のうち y 切片が大きいほうを m とする．直線 m の方程式は $y = -x + k$ とおかれ，これと E の方程式を連立して y を消去した x の二次方程式 $4x^2 - 6kx + 3(k^2 - 4) = 0$ は重解をもつ．この二次方程式の判別式が $D' = 36k^2 - 48(k^2 - 4) = -12(k-4)(k+4) = 0$ を満たすので $k = 4$. このとき，m と E の接点 T の座標は $(3, 1)$ であることが分かる．

$P = T$ のときに PQ の長さが最小になることを示す．仮に $P \neq T$ としよう．このとき，点 T から l へ下ろした垂線の足を K とし，線分 PQ と直線 m の交点を R とする．平行線の性質から $TKQR$ は長方形なので，$PQ = PR + RQ = PR + TK > TK$. ゆえに，$PQ$ の長さ

は最小にならない．

K の x 座標を p とすると，直線 TK の傾きは $(5-p)/(p-3)=1 \Leftrightarrow p=4$．よって，$K=(4,2)$．したがって，求める PQ の最小値は $\sqrt{(4-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

まず，前記誤答を立て直すために次の確認をしよう．⑪と⑫の間でミスが発生したことが分かるだろう．

問題 14.10. ⑨ 〜 ⑮ にそれぞれ $\theta=\pi/6$ を代入して得られる t の二次式を求めよ．

⑫ は

$$2\{t-(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\}^2-2(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)^2+12\cos^2\theta+(2\sin\theta-6)^2$$

と修正されるべきで，これは

$$2\{t-(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3)\}^2+2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-3)^2$$

に等しい．$t=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+3$ かつ $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin(\theta+\pi/3)=2$, つまり $P=(3,1)$, $Q=(4,2)$ のとき PQ は最小値 $\sqrt{2}$ をとる．

高専・大学での知識を範囲に込めると **ラグランジュの乗数法**を用いる解法もある．誘導付きの演習問題に残しておく．

問題 14.11. $P=(p,q)$, $Q=(r,s)$ とすると，例題 14.4 は束縛条件 $g_1(p,q,r,s)=(p^2/12)+(q^2/4)-1=0$, $g_2(p,q,r,s)=r+s-6=0$ の下で $f(p,q,r,s)=(p-r)^2+(q-s)^2$ の最小値を求める問題と言える．

(1) 行列 $G=(\mathrm{grad}\,g_1,\mathrm{grad}\,g_2)$ の階数が 2 になることを確認せよ．

(2) $(p,q,r,s)=(3,1,4,2)$ のとき $f(p,q,r,s)$ は最小値 2 をとることを示せ．

一度解いた問題でも何回も見直して，別のアプローチも見つけたり検算の方法を考えると豊かな発想力が身につく．是非，実践されたい．

15　数列・関数の恒常的大小関係は極限にも遺伝する

数列に常にある大小関係が成り立つならば，それは極限においても保持される．当然のことではあるがこの確認を怠ったと思われる解答は多く，教師として非常に残念である．例えば，$a_n=1/n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ では，すべての自然数 n について $0<1/n\leqq 1$ なので，$0\leqq \lim_{n\to\infty}a_n\leqq 1$ が成立する．実際，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．しかし，下記のように数式が複雑になる程，検算をしていないと思しき解答が散見される．

15.1 基本

例題 15.1. 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ：

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2-n}-2n}{n}.$$

強引な方法で極限を計算した例を紹介しよう.

$$\frac{\sqrt{n^2-n}-2n}{n}(=①) = \frac{\sqrt{n^2-3n}}{n}(=②)(★) = \sqrt{1-\frac{3}{n}}(=③)$$

より $n \to \infty$ として答は 1.

まず，答が正しくないことの確認をしておこう：すべての自然数 n に対して，$n^2-n \leqq n^2$ より $\sqrt{n^2-n} \leqq \sqrt{n^2} = n$ なので，

$$a_n \leqq \frac{n-2n}{n} = -1.$$

よって，**極限値が存在するとしても -1 以下**でなければならない.

誤答内で示された等式を簡単に検証しよう．答が正しいならこの等式は $n=2$ でも成立するはずだが，$n=2$ のとき，$① = (\sqrt{6}-6)/2$, $② = ③ = 0$. よって，② から修正が望まれる.

例題 15.1 は根号の統一は不要であり，分母と分子を n で割れば良いだけである：

$$a_n = \sqrt{1-\frac{1}{n}} - 2 \to -1 \quad (n \to \infty).$$

定期試験や入学試験では不可能なことが多いが，**普段の学習では電卓を利用して近似値を計算することも良い**検算である．演習問題に残しておくので試されたい.

問題 15.1. 例題 15.1 にて a_{100} の近似値を電卓により求めよ．それは正答の -1 とどの程度近いか.

簡単な評価により一定の確率でミスが防げる場合は他にもある．以下に類題を挙げておくので試されたい.

問題 15.2. 次の数列の極限を調べよ.

(1) $a_n = \dfrac{3n^2-4n+1}{5n^2-6n+2}$　　(2) $a_n = \log(4n+1) - \log(2n-1)$

(3) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$　　(4) $a_n = n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

((1) 九州工業大・編入)

本節冒頭にて注意したことは関数にも通ずる話である．次の例題で見てみよう．

例題 15.2. 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+x^2}dx$$

（東京農工大・編入）

内容的に論外ではあるがよく見かける誤答を一つ挙げておく．

$1/(x+x^2) = (1/x)+(1/x^2)$ (★) なので，

$$与式 = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = [\log x]_1^\infty + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \infty.$$

まずは上記の答が誤りであることを確認しておこう．

問題 15.3. $x \geqq 1$ において次の不等式が常に成立することを示せ．

$$\frac{1}{x+x^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

例題 15.2 の被積分関数について評価しよう．$1 \leqq x$ では $x \leqq x^2$ なので $1+x^2 \leqq x+x^2 \leqq 2x^2$ である．よって，

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x^2}dx \leqq \int_1^\infty \frac{1}{x+x^2}dx \leqq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \cdots ④$$

が成立する．左辺と右辺はそれぞれ簡単に計算されるので演習問題としておく．

問題 15.4. 次の等式を確認せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2x^2}dx = \frac{1}{2}$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

さて，上記誤答を正していこう．例題 15.2 の**ポイントは部分分数分解**であった：

$$\frac{1}{x+x^2} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

なので，

$$\begin{aligned} 与式 &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}dx - \int_1^M \frac{1}{x+1}dx \\ &= \lim_{M\to\infty}[\log|x| - \log|x+1|]_1^M \\ &= \lim_{M\to\infty}\log\frac{M}{M+1} + \log 2 \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

関数電卓によれば $\log 2 \fallingdotseq 0.6931$, $\pi/4 \fallingdotseq 0.7854$ なので，この結果は ④ の評価に適っている．

関数についてもいくつか類題を挙げておく．しっかり検算されたい．

問題 15.5. 次の極限値を求めよ．

$$(1)\quad \lim_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3} \qquad (2)\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

問題 15.6. 次の広義積分を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

$$(1)\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a}dx$$

15.2　応用

例題 15.2 ほど厳しい評価でなくとも出た答がおかしいことに気付くシーンは他にもある．次の例題の誤答例でそのことを示そう．

例題 15.3. n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}(\log p_n)/n$ を求めよ．

（2010 年，京大・理系）

各ボールが箱に入る場合の総数は $(2n)^n$ 通り．各ボールが題意を満たすように箱に入る場合の数は ${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通り．よって，

$$p_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n}=2^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right).\ \cdots⑤$$

ゆえに，

$$\frac{\log p_n}{n}=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}-\log 2.\ \cdots⑥$$

$n\to\infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\int_0^1\log(1+x)dx-\log 2=[(1+x)\log(1+x)-x]_0^1-\log 2=2\log 2-1.\ (\bigstar)$$

答によれば $2\log 2-1=\log(4/e)>\log 1=0$ だが，一方で $0\leqq p_n\leqq 1$ より $(\log p_n)/n\leqq 0$ でなければならない．この時点で上記の答に誤りが含まれていることが分かる．

ポイントは次の三つに分かれるであろう．

- Ⓐ p_n の式を書く．
- Ⓑ $(\log p_n)/n$ の式を区分求積法が適用されるよう整理する．
- Ⓒ $n\to\infty$ の時の答を求める．

$n=3$ としてみる．箱に 1, 2, 3, 4, 5, 6 と番号を付け，ボールに㋑，㋺，㋩と名付ける．この順にボールを投げるとする．ボールの入り方の総数は $6^3=216$ 通り．その内題意を満たすものは，㋑が 6 箇所，㋺が残りの 5 箇所，㋩がさらに残りの 4 箇所と考えると，$6\cdot 5\cdot 4=120$ 通り．よって，$p_3=5/9$ で $(\log p_3)/3=(\log 5)/3-(2/3)\log 3$ となるはずである．

一方，⑤, ⑥ で $n=3$ とすると，それぞれ Ⓐ, Ⓑ ともに前述の結果に一致する．ここから Ⓒ でミスが発生した確率が高いと考えられる（実際に，Ⓐ と Ⓑ においてミスはない）．残りの確認は読者に任せよう．

問題 15.7. 上記誤答を訂正し，かつ例題 15.3 の答が $\log 2-1$ であることを示せ．

余談だが，$\log 2-1=\log(2/e)$ かつ $(\log p_n)/n=\log\sqrt[n]{p_n}$ なので，例題 15.3 の結果は n が十分大きいならば $p_n \fallingdotseq (2/e)^n$ ということを意味する．関数電卓によりこのことを確かめられたい．

問題 15.8. p_{20} の値と $(2/e)^{20}$ の値を比較せよ．

次の例題は複素関数を使うと楽だが，高校程度の微積分でも計算できる．

例題 15.4. 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

実関数の範囲で取り扱うならば**部分分数分解がポイント**となるが，下記誤答はその過程でミスをしたまま最後まで突っ込んだ事例である．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2} \\
&= \frac{1}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}x}\cdot\frac{(x^2+1+\sqrt{2}x)-(x^2+1-\sqrt{2}x)}{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)}-\frac{1}{x(x^2+1+\sqrt{2}x)}\right\} = ⑦
\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)} \\
= \quad & \frac{x(2x-\sqrt{2})-2x^2+\sqrt{2}x+1}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)} \\
= \quad & \frac{x(2x-\sqrt{2})-2(x^2+1-\sqrt{2}x)-\sqrt{2}x+3}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)} \\
= \quad & \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}+\frac{3}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)}. \cdots \text{⑧}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\frac{1}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}. (\bigstar) \cdots \text{⑨}
$$

⑨ の x と $-x$ を入れ替えて，

$$
-\frac{1}{x(x^2+1+\sqrt{2}x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+1+\sqrt{2}x}+\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x^2+1+\sqrt{2}x}. \cdots \text{⑩}
$$

⑨ + ⑩ より

$$
\text{⑦} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1-\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+1+\sqrt{2}x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1+\sqrt{2}x}.
$$

与式を I とおくと，

$$
\begin{aligned}
I \quad = \quad & -\frac{1}{4\sqrt{2}}\lim_{M\to\infty}\underbrace{\left(\int_0^M \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}dx-\int_0^M \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+1+\sqrt{2}x}dx\right)}_{\text{⑪}} \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx}_{\text{⑫}} \quad \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx.}_{\text{⑬}}
\end{aligned}
$$

⑪ の第二項にて $x=-y$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\text{⑪} \quad = \quad & \int_0^M \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}dx+\int_{-M}^0 \frac{2y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}dx \\
= \quad & \int_{-M}^M \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x}dx. (= \text{⑭})
\end{aligned}
$$

ここで，$x^2+1-\sqrt{2}x=\{x-(1/\sqrt{2})\}^2+(1/2)$ に注意する．$t=x^2+1-\sqrt{2}x$ として，

$$
\begin{aligned}
\text{⑭} \quad = \quad & \int_{M^2+1+\sqrt{2}M}^{M^2+1-\sqrt{2}M} \frac{1}{t}dt \\
= \quad & [\log t]_{M^2+1+\sqrt{2}M}^{M^2+1-\sqrt{2}M} \\
= \quad & \log\frac{M^2+1-\sqrt{2}M}{M^2+1+\sqrt{2}M} \\
\to \quad & 0\ (M\to\infty).
\end{aligned}
$$

さらに，$x = -z$ とすると，

$$\begin{aligned}
⑫+⑬ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx - \int_0^{-\infty} \frac{1}{\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dx \\
&= \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

ただし，最後の行にて問題 15.6 (2) の結果を用いた．よって，答は $-(\pi/\sqrt{2})$.

与式の被積分関数が常に正であることから答がおかしいことは明らかである．しかし，原因となったミスを修正しない限り正解にはたどり着けない．ミスの修正の前に正解となり得る値を簡単に絞り込んでおこう．

まず，次の事実を用いる（証明は演習問題）.

問題 15.9. $x \geqq 1$ のとき，常に $24e^x \geqq x^4+1$ であることを証明せよ．

ここから，

$$\int_0^1 \frac{1}{2}dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{24}dx \leqq I \leqq \int_0^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx.$$

また，

$$左辺 = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}[-e^{-x}]_1^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24e} > 0.51, \quad 右辺 = 1 + [\arctan x]_1^{\infty} = 1 + \frac{\pi}{4} < 1.79$$

なので，$0.51 < I < 1.79$ となるはずである（実は $I = \pi/(2\sqrt{2})$ でその近似値は 1.11）.

さて，どこでミスが起こったか一部を演習問題にしつつ確認しよう．まずは与式の被積分関数を ⑦ まで変形するくだりから．次のことを確認されたい．

問題 15.10. 例題 15.4 の誤答例内，$1/(x^4+1)$ を ⑦ まで変形した部分にて $x = 1$ としたときの各行の値を求めよ．

次に ⑦ の中括弧内の第一項を部分分数分解によって変形するくだりにミスはないか．

問題 15.11. 同誤答例内の⑧ にて $x = 1$ としたときの各行の値を求めよ．

問題 15.10 と問題 15.11 の結果から，不完全な検算だが，ミスは発生してなさそうである（実際に発生していない）．⑨ の等式が怪しくなってくるが，「そんないいかげんな検算は許せない！」と思われる潔癖性の方はその前に次の確認もしておくと良い．

問題 15.12. (1) ⑦ の式を通分の上，整理して $1/(x^4+1)$ になることを確かめよ．
(2) ⑧ の最後の行を通分の上，整理して $1/\{x(x^2+1-\sqrt{2}x)\}$ になることを確かめよ．

では，⑨ について次のことを確認されたい．

問題 15.13. 同誤答例内の⑨ にて $x=1$ としたときの左辺と右辺の値を求めよ.

ここで, ⑨ に誤りがあったことが分かる. ⑨ は次が正しい：

$$\frac{1}{x(x^2+1-\sqrt{2}x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2+1-\sqrt{2}x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x^2+1-\sqrt{2}x}.$$

⑨ に連動して誤った ⑩ は次の通り修正される：

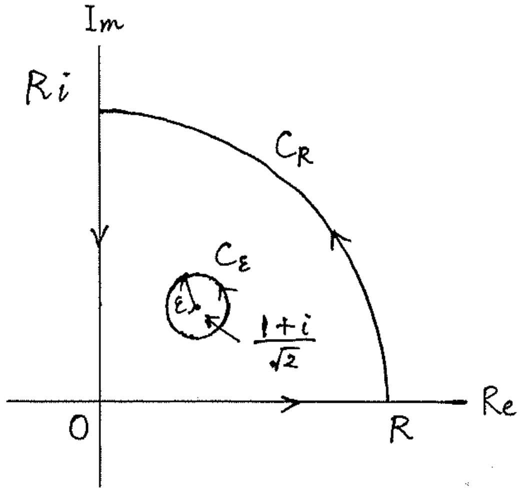
$$-\frac{1}{x(x^2+1+\sqrt{2}x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+1+\sqrt{2}x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x^2+1+\sqrt{2}x}.$$

ここから先の修正は誤答例の方法を真似すれば良いだけなので読者に任せよう.

問題 15.14. 例題 15.4 の正解が $\pi/(2\sqrt{2})$ であることを確認せよ.

例題 15.4 は複素関数によく出る問題の一つであり，コーシーの積分定理を用いた解法が楽かと思われる. こちらの解法は演習問題に残しておくが，読者においても**一つの問題について多くの解法を**検討されたい.

問題 15.15. 積分路を下図のようにとることで例題 15.4 を解け.



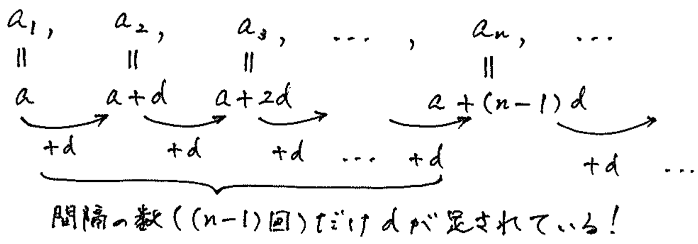
16 数列の一般項や行列の累乗は最初の何項かを確認せよ

数列も高校生・高専生が苦手としがちな分野の一つだが，計算ミスの原因として**諸々の公式を誤って暗記している**ことが考えられる. 例えば，初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = a + nd$ (★) などと暗記している人がいる. しかし，定義によれば

$$a_1 = a, \quad a_2 = a+d, \quad a_3 = a+2d, \cdots ①$$

である. 一方，(★) にて $n = 1,2,3$ とすれば，それぞれ $a_1 = a+d, a_2 = a+2d, a_3 = a+3d$ となりおかしい. この失敗から d **が一つずつ余分に足されている** ことが分かる. また，①

のパターンから a_n は前から n 番目の項であって，初項 a に公差 d を **項の数から 1 を引いた回数分**（つまり $(n-1)$ 回分）だけ足せば得られることも分かる（下図も見よ）.



数学はアイデアを学ぶ学問である．暗記した公式を問題にはめこむのも良いが，**一部のパターンから全体を推理することも大切** である．勿論，推理した後は証明することも大切である.

16.1　基本

冒頭では等差数列を例にとったが等比数列ではどうだろうか.

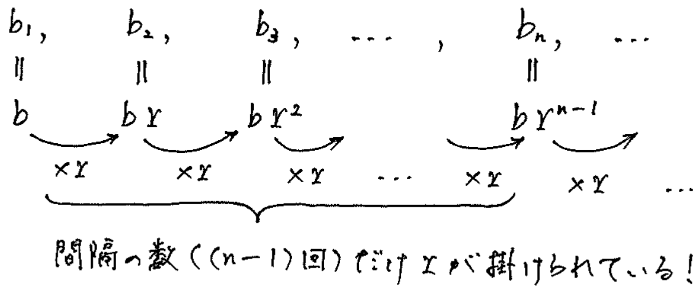
例題 16.1. 等比数列 $\{b_n\}$ が $b_1 + b_3 = 3, b_2 + b_4 = 27$ を満たすとき，一般項 b_n を求めよ.

（2008 年，宮城教育大）

冒頭のミスと似たような誤答を紹介しておく.

> b は初項，r は公比とすると，等比級数の一般項の公式より $b_n = br^n$ (★) なので，
>
> $$b_1 + b_3 = br(1+r^2) = 3\ (\cdots②), \quad b_2 + b_4 = br^2(1+r^2) = 27\ (\cdots③).$$
>
> ② より $b, r, 1+r^2$ はどれも 0 にならない．よって，②③ より
>
> $$r = \frac{br^2(1+r^2)}{br(1+r^2)} = \frac{27}{3} = 9.$$
>
> これを ② に代入して $b = 3/(9 \cdot 82) = 1/246$. したがって，$b_n = 9^n/246 = 3^{2n-1}/82$ $(\cdots④)$.

定義より $b_1 = b$ **のはず**であるが，上記答案によれば $b = 1/246$. 一方，④ によれば $b_1 = 3/82$ となってずれていることが分かる．答の一般項自体は正しいが，記述式の問題であればいくらか減点であろう．むやみに公式の暗記に頼らず，下図に示すように，等比数列の変化をしっかりと図で認識することが大事である.



この図から誤答を立て直してみよう：$b_2 = rb_1$ かつ $b_4 = rb_3$ なので $b_2 + b_4 = r(b_1 + b_3)$ つまり $27 = 3r \Leftrightarrow r = 9$ が言える．初項は b_1 で，$b_3 = rb_2 = r^2 b_1 = 81b_1$ なので，$b_1 + b_3 = 82b_1 = 3$. したがって，$b_1 = 3/82$. ゆえに，求める一般項は

$$b_n = \left(\frac{3}{82}\right) \cdot 9^{n-1} = \frac{3^{2n-1}}{82}.$$

最初の何項かを計算して確認する習慣を身に付ければ，何かと数式だらけで**複雑怪奇になりがちな雰囲気もがらりと変わる**のではないだろうか．追加の演習問題をいくつか出しておく．

問題 16.1. $a_4 = 174$, $a_9 = 419$ である等差数列 $\{a_n\}$ の初項は $\boxed{}$，公差は $\boxed{}$，かつ一般項は $a_n = \boxed{}$ である．

（2008 年，大阪工大，改題）

問題 16.2. 公比が負の数である等比数列がある．初項から第 4 項までの和は -15, 第 5 項と第 6 項との和は -48 であるという．この等比数列の初項と公比を求めよ．

（1990 年，福岡大）

例題 16.2. 二次正方行列 A が

$$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

をみたすとする．このとき，自然数 n に対して A^n を求めよ．

（2012 年，横浜市立大，改題）

適宜確認をしながら解答する必要性を痛感させられる誤答を紹介しよう．

$A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ とする．このとき，与式から

$$\begin{cases}3a + 2b &= 1\\3c + 2d &= 1,\end{cases} \qquad \begin{cases}a + b &= 3\\c + d &= 2\end{cases} \quad \cdots⑤$$

となるので，

$$\begin{cases}3a+2b &= 1\\ a+b &= 2,\end{cases}\qquad \begin{cases}3c+2d &= 1\\ c+d &= 3.\end{cases}\quad (\bigstar)$$

これを解いて，$a=-3, b=5, c=-5, d=8$. したがって，$A=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ だから

$$A^2=\begin{pmatrix}-16 & -25\\ 25 & 39\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}-77 & -120\\ 120 & 187\end{pmatrix},\quad A^4=\begin{pmatrix}-369 & -575\\ 575 & 896\end{pmatrix},\cdots(\sharp)$$

ここから A^n を推理することは困難であるし，

$$A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$$

とおいて $A^{n+1}=AA^n$ より漸化式を立てても難しかろう．よしんば，それで答が出たとしても誤りであって点数は付かない．それ以前に彼は A **が与式を満たすかを確認すべきであった**：上記の A が正しいなら与式の一番目は満たされるはずだが，

$$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\31\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

そこで，⑤ に上記の $a=-3, b=5, c=-5, d=8$ を代入すると，二組目の第一式で矛盾が生じる．一方，($\bigstar$) では矛盾は生じない．

問題 16.3. このことを確かめよ．

ゆえに，($\bigstar$) は次のように直すべきであることが分かる．

$$\begin{cases}3a+2b &= 1\\ a+b &= 3,\end{cases}\qquad \begin{cases}3c+2d &= 1\\ c+d &= 2.\end{cases}$$

これを解くと，$a=-5, b=8, c=-3, d=5$. したがって，

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -3 & 5\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E_2.$$

ここに，E_2 は二次の単位行列．正答は

$$A^n=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -3 & 5\end{pmatrix}(n\text{ が奇数}),\qquad A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(n\text{ が偶数}).$$

結局，A が正しく求められれば何ともなかった．前述の漸化式を用いた方法でも次のように求められるが，これは演習問題とする．

問題 16.4. 例題 16.2 において，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする．

(1) A^2 を求めて，$a_1, a_2, \cdots, d_2$ を求めよ．

(2) $A^{n+1} = AA^n$ から $a_{n+2} = a_n, b_{n+2} = b_n, \cdots, d_{n+2} = d_n$ が得られることを示せ．

(3) A^n を求めよ．

また，逆行列を用いた別解も面白い．演習問題を交えて紹介しておこう．

〈別解〉まず，二次正方行列 B と 2×1 行列 X, Y について，

$$B\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \end{pmatrix}$$

が成立する．

問題 16.5. このことを証明せよ．

問題 16.5 の結果から，

$$A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

問題 16.6. このことを確かめよ．

したがって，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

これ以降は前記正答に同じなので省略する．

16.2 応用

漸化式から一般項を求める問題では，等差数列の漸化式か等比数列の漸化式かがすぐには分からず手間を要する問題が結構ある．

例題 16.3. 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 9, a_{n+1} = 2a_n - n - 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をみたす．$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（2004 年，同志社大）

私が思いつく限り三通りの解法があるが，一番ポピュラーなのは**階差数列をとる**方法ではないだろうか．その過程でつまづいた例を見せよう．

与漸化式から $a_{n+2}=2a_{n+1}-n-1$ (★) なので，与漸化式から辺々引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n).$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおけば，$b_{n+1}=2b_n$. また，与式から $a_2=2\cdot 9-1-1=16$ なので $b_1=a_2-a_1=16-9=7$. 以上より，数列 $\{b_n\}$ は初項 7, 公比 2 の等比数列なので，$b_n=7\cdot 2^{n-1}(=a_{n+1}-a_n)$. よって，$n\geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned} a_n-a_1 &= (a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1) \\ &= 7\cdot(1+2+\cdots+2^{n-3}+2^{n-2}) \\ &= 7\cdot 2^{n-1}-7. \end{aligned}$$

$a_1=9$ より $a_n=7\cdot 2^{n-1}+2$ (⋯⑥). ⑥ に直接 $n=1$ を代入しても $7\cdot 1+2=9=a_1$ より成立する．したがって，⑥ はすべての自然数 n で成立する．

この誤答の恐しい所は a_1 と a_2 の値が題意とずれない所である．実際，与漸化式からも ⑥ からも $a_2=16$ が得られる．しかし，かなりはじめの段階で誤っているため点数は絶望的であろう．彼はせめて $n=3$ のときの確認をしておくべきだった：与漸化式によれば $a_3=29$ だが，⑥ によれば $a_3=7\cdot 2^2+2=30$.

勿論，万全を期したいならば答の一般項を直に与漸化式に代入して確認するのも良い．⑥ と与漸化式から

$$a_{n+1}=2a_n-n-1=2(7\cdot 2^{n-1}+2)-n-1=7\cdot 2^{(n+1)-1}-n+3$$

だが，一方で ⑥ から $a_{n+1}=7\cdot 2^{(n+1)-1}+2$ となり矛盾が生じる．

誤った箇所を見つけるためには，与漸化式によって a_1,a_2,a_3 を計算した後に (★) にて $n=1$ として矛盾があるか確認するのが早い．

問題 16.7. この方法で上記誤答に矛盾が生じることを確かめよ．

さて，(★) は $a_{n+2}=2a_{n+1}-n-2$ とするのが正しい．ここから誤答を修正しよう：$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると，

$$\begin{array}{rrcllll} & a_{n+2} & = & 2a_{n+1} & -n & -2 & \\ -) & a_{n+1} & = & 2a_n & -n & -1 & \\ \hline & b_{n+1} & = & 2b_n & & -1 & \cdots ⑦ \end{array}$$

であり $b_1=a_2-a_1=16-7=9$. ⑦ $\Leftrightarrow b_{n+1}-\beta=2(b_n-\beta)\Leftrightarrow b_{n+1}=2b_n-\beta$（$\beta$ は実定数）と変形されたとすると $\beta=1$. したがって，$c_n=b_n-1$ とすると，⑦ $\Leftrightarrow c_{n+1}=2c_n$ かつ $c_1=6$. ゆえに，数列 $\{c_n\}$ は初項 6, 公比 2 の等比数列である．よって，$c_n=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$. これ

から $n \geqq 2$ のときは次のように辺々足して数列 $\{b_n\}$ の一般項が求められる．

$$\begin{array}{rrcl} & b_n - b_{n-1} & = & 3 \cdot 2^{n-1} \\ & b_{n-1} - b_{n-2} & = & 3 \cdot 2^{n-2} \\ & \vdots & & \\ & b_3 - b_2 & = & 3 \cdot 2^2 \\ +) & b_2 - b_1 & = & 3 \cdot 2 \\ \hline & b_n - b_1 & = & 3 \cdot (2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) \\ & & = & 3 \cdot \dfrac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} \\ & & = & 3 \cdot 2^n - 6 \end{array}$$

より $b_n = 3 \cdot 2^n - 6 + b_1 = 3 \cdot 2^n + 1$ $(\cdots⑧)$. $n = 1$ を ⑧ に代入すると $b_1 = 7$ となり，前述に一致する．また，今の方法と同様にして数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 3 \cdot 2^n + n + 2$ であることが分かるが，検算も含めて読者の演習問題にしよう．

問題 16.8. (1) このことを証明せよ．
(2) 得られた答が例題 16.3 にて与えられた漸化式を満たすことを確認せよ．

上記修正版の正答にて数列 $\{b_n\}$ から数列 $\{c_n\}$ を得る手法を少し改良すると，次のような別解が得られる．

〈別解 1〉 与漸化式が $d_{n+1} = 2d_n$ と同値になるよう $d_n = a_n + (\gamma n + \delta)$ を満たす実定数 γ, δ を定めたい．このとき与漸化式は $a_{n+1} = 2a_n + \gamma n - \gamma + \delta$ と同値なので，$\gamma = -1$ かつ $-\gamma + \delta = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$ かつ $\delta = -2$. したがって，$d_n = a_n - n - 2$ であって，このとき与漸化式は $d_{n+1} = 2d_n$ と同値．しかも，$d_1 = a_1 - 3 = 6$ なので，数列 $\{d_n\}$ は初項 6, 公比 2 の等比数列である．よって，$d_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$ だから

$$a_n = d_n + n + 2 = 3 \cdot 2^n + n + 2.$$

最後の方法は**与漸化式の両辺を 2^{n+1} で割る**方法である．この解法もいろいろな鍛錬を含んでおり興味深い．一部を演習問題にして紹介しよう．

〈別解 2〉 与漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると $a_{n+1}/2^{n+1} = (a_n/2^n) - (n+1)/2^{n+1}$. $e_n = a_n/2^n$ とすると，$e_1 = a_1/2 = 9/2$ であり，$e_{n+1} - e_n = -(n+1)/2^{n+1}$. 上記修正版の方法を真似する

と，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{rrcl} & e_n - e_{n-1} & = & -\dfrac{n}{2^n} \\ & e_{n-1} - e_{n-2} & = & -\dfrac{n-1}{2^{n-1}} \\ & \vdots & & \\ & e_3 - e_2 & = & -\dfrac{3}{2^3} \\ +) & e_2 - e_1 & = & -\dfrac{2}{2^2} \\ \hline & e_n - e_1 & = & -\left(\dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}\right) \end{array}$$

が言えて，少し整理すると

$$e_n = 5 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right)}_{⑨}.$$

$n = 1$ のとき，右辺は $5 - (1/2) = 9/2$ なので，この式は $n = 1$ のときでも通用する．⑨ を S_n とおくと $S_n = 2 - (1/2^{n-1}) - (n/2^n)$ が分かる．

問題 16.9. このことを証明せよ．

$a_n = 2^n e_n$ より

$$a_n = 5 \cdot 2^n - S_n \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n + 2 + n = 3 \cdot 2^n + n + 2.$$

確率の問題で漸化式を立てる場合もある．この場合にも最初の何項かを確認するだけでミスを防ぐことができる．

例題 16.4. 三つの部屋 A, B, C がある．千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等確率 $1/2$ で一つ選び，そこへ移動する．最初，部屋 A にいた千葉君が n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 B にいる確率を求めよ．

（2011 年，千葉大・理系・前期，改題）

題意の内容を勘違いして最後までやりきった誤答例を挙げよう．しかし，この答でははとんど点数はつかないだろう．

> n 回部屋を移動した後に千葉君が A, B, C にいる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とする．また，題意より $p_0 = 1, q_0 = r_0 = 0$ である．千葉君は n 回部屋を移動した後に部屋 A または部屋 C にいさえすれば，次の回で部屋 B に行けるチャンスがあるので $q_{n+1} = p_n + r_n$ (★) $(\cdots ⑩)$ が成立．一方，すべての $n(= 0, 1, \cdots)$ に対して $p_n + q_n + r_n = 1$ $(\cdots ⑪)$. ⑩, ⑪ より $q_{n+1} = 1 - q_n$. これが $q_{n+1} - \rho = -(q_n - \rho) \Leftrightarrow q_{n+1} =$

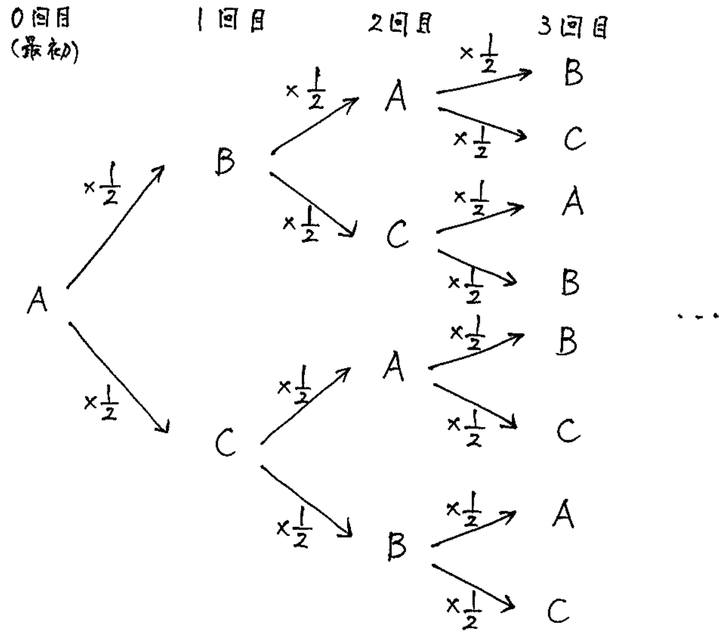
$2\rho - q_n$ と同値になるよう実定数 ρ を定めると，$\rho = 1/2$ である．$q_0 = 0$ なので，

$$q_n - \frac{1}{2} = (-1)^n\left(q_0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \Leftrightarrow q_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}.$$

この答から $q_1 = 1$ であるが，題意から $q_1 = 1/2$ なので適切ではない．しかも，⑩ の考え方を認めると，$p_{n+1} = q_n + r_n$ と $r_{n+1} = p_n + q_n$ も成立してしまう．これらと ⑩, ⑪ を組み合わせると，

$$\begin{array}{lrcl} & q_{n+1} & = & p_n + r_n \\ & p_{n+1} & = & q_n + r_n \\ +) & r_{n+1} & = & p_n + q_n \\ \hline & p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} & = & 2(p_n + q_n + r_n) = 2 \end{array}$$

となり ⑪ に矛盾する．⑪ は題意より明らかな式であるから，**⑩ に無理があった**と考えるのが妥当である．次のように最初の部屋移動の様子を樹形図にして描けば立式も間違えにくいだけに残念である．



さて，$n+1$ 回目の移動後に千葉君が部屋 B にいる場合は，

- n 回目の移動後に部屋 A におり，かつ $n+1$ 回目の移動で部屋 B に移るか,
- n 回目の移動後に部屋 C におり，かつ $n+1$ 回目の移動で部屋 B に移るか,

のいずれかである．両者の事象は両立しないから，⑩ は $q_{n+1} = (p_n/2) + (r_n/2)$ $(\cdots$⑩$')$ とするのが正しい．⑩$'$, ⑪ から $q_{n+1} = (1/2)(1 - q_n)$. これが

$$q_{n+1} - \rho' = -\frac{1}{2}(q_n - \rho') \Leftrightarrow q_{n+1} = -\frac{1}{2}q_n + \frac{3}{2}\rho'$$

と同値となるよう実定数 ρ' を定めると, $(3/2)\rho' = 1/2 \Leftrightarrow \rho' = 1/3$. よって, 数列 $\{q_n - (1/3)\}$ は初項 $-1/3$, 公比 $-1/2$ の等比数列なので,

$$q_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot 3} + \frac{1}{3}.$$

前記樹形図から $q_0 = 0$, $q_1 = 1/2$, $q_2 = 1/4$, $q_3 = 3/8$ が明らか. 正答とのずれがないかの確認は演習問題とする.

問題 16.10. このことを確かめよ.

高専・大学で線形代数の勉強を一通り終えた方は次のような別解も思いつくであろう. 誘導付き演習問題にしておくので試されたい.

問題 16.11. 例題 16.4 の条件と記号に対して,

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対して固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の結果からある正則行列 P によって A は対角化可能である（つまり, 対角行列 Λ により $A = P\Lambda P^{-1}$ となる）ことを示せ.

(4) A^n を求めよ.

(5) p_n, q_n, r_n を求めよ.

余談だが, この問題における行列 A は**各成分が 0 以上 1 以下の実数でかつ各行の成分の総和が 1** である. このような正方行列を**確率行列**という. 一般に, $n \times n$ の確率行列については次のことが知られている.

- 確率行列の固有値の絶対値は必ず 1 以下である.
- 固有値 1 はその内の一つに必ず含まれ, かつその固有ベクトルは ${}^t(s, \cdots, s)$（s は実数）である.

例題 16.4 は元は次の問題であった（解法は上記の方法と似ているので, 読者の演習に残しておく).

問題 16.12. $k+1$ 個の部屋 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ がある. 千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等確率 $1/k$ で一つ選び, そこへ移動する. 最初, 部屋 A_0 にいた千葉君が n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ.

この問題は例題 16.4 にて紹介した二つの方法で解かれるだろうか．両者を検討されたい．

17　0 でない数とその逆数の積は必ず 1

タイトルは当然のように聞こえるが，相手にするものが無理数になるとなぜかこの検算が行われないことが多い．またタイトルでは「逆数の積」としたが，現代の数学では**積**という演算をもつ数の集まりは**群**と呼ばれ，次の通り統べられている：積 $\cdot$ により次の三つのルールを満たす数の集合 G を群という．

- G に属する任意の a, b, c について，$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$（結合法則）が成立する．
- G は**単位元** e があり，G 内の任意の a に対して $a\cdot e = e\cdot a = a$ が満たされる．
- G 内の任意の a に対して，$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$ を満たす**逆元** a^{-1} が必ず存在する．

例えば，0 を除いた実数の集合は通常の実数の掛け算を上記の意味での積として群になる．この場合，単位元は 1 で，逆元とは逆数のことである．また，行列式が 0 でない二次正方行列の集合は行列の積を上記の意味での積として群になる．このとき，単位元は E_2 で，逆元とは逆行列のことをいう．

少し抽象的な話をしたが，以下では具体的な例について観察していこう．

17.1　基本

例題 17.1. 次の数の分母を有理化せよ：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を利用して **一つずつ根号を減らす**のがポイントであるが，次のように正負の符号を誤ったものはよく見られる．

$$\begin{aligned}
\text{与式}\ (= ⓪) &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}(\bigstar) && (= ①)\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} && (= ②)\\
&= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}. && (= ③)
\end{aligned}$$

⓪ の逆数は $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ なので，上記の答が正しいなら，③ に $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を掛け

ると当然 1 になる．しかし，

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12}\\
=\ &\frac{2\sqrt{6}+6+2\sqrt{15}+6+3\sqrt{6}+3\sqrt{10}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{6}}{12}\\
=\ &\frac{6+5\sqrt{6}+3\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{6}\\
>\ &\frac{6+5\sqrt{4}+3\sqrt{9}+2\sqrt{9}}{6}\left(=\frac{31}{6}\right)
\end{aligned}$$

となりおかしい．② で同じ検証をすると，

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2\sqrt{6}} > \frac{(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{4})^2}{2\sqrt{9}} = \frac{8}{3}.$$

① で同じ検証をすると，$1.41<\sqrt{2}<1.42$, $1.73<\sqrt{3}<1.74$, $2.23<\sqrt{5}<2.24$ より

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} > \frac{(1.41+1.73+2.23)^2}{(1.42+1.74)^2-5} = \frac{28.8369}{4.9856} > 5.$$

よって，① までおかしいので最初から計算し直さなければいけない．「試験の時にはそんな厳密な確認はできない！」という人は次の確認をすれば良かろう．⓪ の近似値が他の三つより大幅にずれるはずである．

問題 17.1. $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$, $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$, $\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2$ となることを用いて，⓪ 〜 ③ の近似値を求めよ．

上記誤答が良くないのは**⓪と①の過程を省いた**ことである．横着せずにしっかりと書くべきであった．

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\
&= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.(=④)
\end{aligned}$$

次の検算は読者の演習とする．

問題 17.2. ④ に $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を掛けると 1 になることを確認せよ．

冒頭にも述べた事情から例題 17.1 と同様の検算が行列に関しても成立する．次の例題に即して示そう．

例題 17.2. a を実定数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1\\ 1 & -a\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

（2011 年，関西大，改題）

うろ覚えの公式を振り回してミスが生じた例を一つ示す．

行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の逆行列は公式より

$$A^{-1} = \frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} \quad (\bigstar)$$

だから，

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

逆行列の公式自体を間違えているので，記述式試験であってもこの答案では厳しい結果になると思われる．

この結果が正しければ $AA^{-1} = E_2$ となるはずだが，

$$AA^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ -2a & -a^2+1 \end{pmatrix} \neq E_2.$$

誤答内の逆行列の公式も次の問題によって正しくないことが示される．

問題 17.3. $ps-qr \neq 0$ とする．次の等式が成立しないことを示せ．

$$\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} = E_2$$

大上段に構えてうろ覚えの公式を使うぐらいなら $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ $(\cdots⑤)$ として $AA^{-1} = E_2$ から**素直に連立方程式を解いた方がよい**：⑤ と $AA^{-1} = E_2$ より，

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+z & ay+w \\ x-az & y-aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$\begin{cases} ax+z = 1 \\ ay+w = 0 \\ x-az = 0 \\ y-aw = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2+1}, y = \frac{1}{a^2+1}, z = \frac{1}{a^2+1}, w = -\frac{a}{a^2+1}.$$

ゆえに，答は

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}. (\cdots⑥)$$

この答に対する検算は読者自身で行ってほしい．

問題 17.4. ⑥ の A^{-1} に対して $AA^{-1} = A^{-1}A = E_2$ となることを確かめよ．

また，逆行列の公式を使いたいならば，せめて問題 17.3 にあるような確認をしてから使うべきである．前記の連立方程式を用いた修正方法を真似すると上記の (★) は $ps-qr \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$$

と修正される．

問題 17.5. 問題 17.4 の方法を真似して，この逆行列の公式が正しいことを示せ．

例題 17.2 は**与行列に単位行列をくっつけた** 2×4 **行列に行の基本変形を施すこと（掃き出し法）**によっても解かれる．こちらは演習問題に残しておく．

問題 17.6. 行の基本変形によって例題 17.2 を解け．

問題を解いた後は**少しアレンジした問題を解いてみる**ことも大切である．例えば，次のような問題はどうだろうか．

問題 17.7. 例題 17.2 の行列 A に対して A^n（n は自然数）を求めよ．

17.2 応用

例題 17.2 にてうろ覚えの公式を振り回さぬよう注意した．そう言うと「では，絶対に公式を使ってはいけないのか」と思う人も出てくるだろうがそうではない．正確に理解した公式ならば役立つこともある．次の例題にて検証しよう．

例題 17.3. xy 平面上の一次変換 f が次の三条件を満たすとする．
(i) 点 $(1,0)$ は f により第 4 象限の内部にうつる．
(ii) 点 $(0,1)$ は f により第 2 象限の内部にうつる．
(iii) 点 $(1,1)$ は f により第 1 象限の内部にうつる．
このとき次の問いに答えよ．
(1) f には逆変換 f^{-1} が存在することを示せ．
(2) 点 P の像 $f(P)$ が第 1 象限の内部にあるとき，点 P は第何象限の内部にあるか．

（1988 年，東大，改題）

逆行列の公式を使わずに (2) で誤答した事例を示そう．

(1) 題意の一次変換を表す行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．(i) より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

なので，$a>0$ かつ $c<0$ ($\cdots$⑦). (ii) より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

なので，$b<0$ かつ $d>0$ ($\cdots$⑧). (iii) より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

なので，$a+b>0$ かつ $c+d>0$ ($\cdots$⑨). ⑦ 〜 ⑨ より A の行列式は

$$ad-bc=ad+ac-ac-bc=a(c+d)-c(a+b)>0.$$

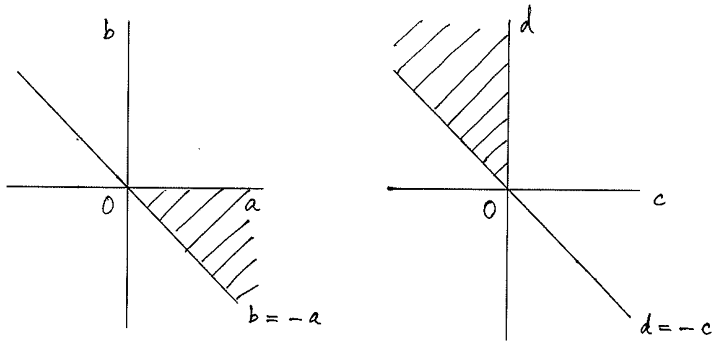
よって，A の逆行列 A^{-1} が存在する．A^{-1} に対応する一次変換が題意の f^{1} である．
（終）

(2) $P=(p,q)$ とすると，

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}$$

なので，$f(P)=(ap+bq,cp+dq)$. $f(P)$ は第 1 象限にあるので，$ap+bq>0$ かつ $cp+dq>0$ ($\cdots$⑩). もし，$q=0$ なら ⑦ から ⑩ $\Leftrightarrow ap>0$ かつ $cp>0 \Leftrightarrow p>0$ かつ $p<0$ となり矛盾する．したがって，以下の二つの場合のみ考えれば良い．

㋐ $q>0$ の場合，⑩ は $b>-(p/q)a$ かつ $d>-(p/q)c$ ($\cdots$⑪) と同値である．⑦ から ⑨ の表す領域をそれぞれ ab 平面と cd 平面に図示すると次のようになる．



両方の図において境界は領域に含まれない.

よって，ab 平面の図から $-p/q<0$ つまり $p>0$ が言える．

㋺ $q<0$ の場合，⑩ は $b>-(p/q)a$ (★) かつ $d<-(p/q)c$ $(\cdots⑫)$ と同値である．ab 平面の図からは $-p/q<0$ つまり $p<0$ が，cd 平面の図からは $-p/q<-1$ つまり $p<q(<0)$ が言える．

㋑，㋺ から答は第 1 象限または第 3 象限である．

最後の考察を誤っただけだが，下記正答と結果がずれたことを考えると口惜しい結果である．㋑ と ㋺ において q の正負は反対であり，⑪ と⑫ が ⑩ の各不等式の両辺を q で割って得られたことから，**⑪ と ⑫における不等号はそれぞれ反対**になるはずである．このようなことにも**対称性を活かした考察を**してほしい．

では，解答者の目線から誤答を修正していこう．(1) は証明問題であり論法にもとくに誤りは見られず，この時点で A^{-1} の存在は認めて良い．ただ，気になる読者は次のことを確かめよ．

問題 17.8. $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を確かめた上で

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A^{-1}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を確かめよ．

したがって，(2) で誤った箇所を考えれば良い．(2) は大きく次のシーンに分けられる．

- $f(P)$ を求めた所.
- $q=0$ の場合の検討.
- ㋑ $q>0$ の場合の検討.
- ㋺ $q<0$ の場合の検討.

$f(P)=(ap+bq,cp+dq)$ が正しいことは問題 17.8 を真似すれば分かる：

$$A^{-1}\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} adp+bdq-bcp-bdq \\ -acp-bcq+acp+adq \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

⑦ が正しいことは問題 17.8 により確認された．$q=0$ の場合についても問題はなかろう．

残りは ㋑ と ㋺ の場合だが，$f(P)=(x,y)$ とおくと

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx-by \\ -cx+ay \end{pmatrix}$$

なので，

$$P=f^{-1}(f(P))=\frac{1}{ad-bc}(dx-by,-cx+ay).$$

(1) より $ad-bc>0$ であり，⑦, ⑧ より $dx-by>0$ かつ $-cx+ay>0$. よって，点 P は第 1 象限にある．

これより ㋑ が正しく ㋺ が誤りであることが分かった．同時に，この検証が例題 17.3 の別解にもなっていることに気付いた読者もいるだろう．㋺ の修正は読者にまかせる．

問題 17.9. 例題 17.3 の誤答例の ㋺ を修正せよ．

与えられたものが数列の場合はどうだろうか．実は次の数列内のあるものの逆数をとると解答しやすくなる．

例題 17.4. a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

（2012 年，京大）

意外とありがちな誤答を紹介しよう．

すべての $n=1,2,\cdots$ に対して

$$(1+a^n)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} + (a^n)^{\frac{1}{n}}(\bigstar) = 1+a$$

なので答は $1+a$.

文字で書かれると一見よく分からないが $a=2$ かつ $n=3$ とすると，上記誤答の式がいかにおかしいかが分かる．実際，左辺の値は $(1+2^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$, 中辺と右辺の値は $1+2=3(=\sqrt[3]{27})$ である．

この例題の難しさの原因の一つは **底が文字定数 a で与えられている** ことであろう．問題が難しいと感じるなら **簡単な場合に置き換えて考える**ことが大切である．底 a の値により a^n の振る舞いは変わるので，$a=1/2, a=1, a=2$ の場合に与数列 $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}(=a_n)$ がどう変わるかを考えてみる．

㋩ $a=1$ のとき，$a_n = 2^{\frac{1}{n}}$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = 2^0 = 1$. [*15]

㋥ $a=2$ のとき，

$$a_1 = 3, a_2 = \sqrt{5}, a_3 = \sqrt[3]{9}, \cdots, a_n = \sqrt[n]{2^n+1}, \cdots$$

となって，少なくとも $a_n \geqq \sqrt[n]{2^n} = 2$ が分かる．[*16] a_n が 2 よりどれだけ大きいかが分からないので，$a_n = 2+b_n$ $(b_n \geqq 0)$ としてみる．このとき，$b_n = \sqrt[n]{2^n+1}-2$ である．ここで，次の初等的公式を確められたい．

[*15] 上記誤答で $a=1$ としてもこの場合に合致しない．

[*16] 賢明な読者はこの時点で $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ に気付くかもしれない．

問題 17.10. 実数 α, β と 2 以上の整数 n について,

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) \ (\cdots ⑬)$$

が成立することを示せ.

⑬ で $\alpha = \sqrt[n]{2^n+1}$ かつ $\beta = 2$ とすると,

$$\begin{aligned}(0 \leqq) b_n &= \sqrt[n]{2^n+1} - 2 \\ &= \frac{(\sqrt[n]{2^n+1})^n - 2^n}{(\sqrt[n]{2^n+1})^{n-1} + (\sqrt[n]{2^n+1})^{n-2} \cdot 2 + \cdots + (\sqrt[n]{2^n+1}) \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}} \\ &\leqq \frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると，はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ が言えるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. この手法は $a = 2$ のときだけではなく 1 より大きいすべての実定数 a においても通用する．演習問題に残しておく.

問題 17.11. $a > 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を示せ.

㊭ $a = 1/2$ のとき,

$$a_n = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2^n+1}}{2}.$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+1} = 2$ であることは ㊁ にてすでに検証した．よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2/2 = 1$.

さて，a が 1 より小さい正定数の場合，**その逆数** $1/a$ **は** 1 **より大きい．** つまり，$a = 1/b$ $(b > 1)$ とおけば，㊭ のときと同様に

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{b}\right)^n + 1} = \frac{\sqrt[n]{b^n+1}}{b} \to \frac{b}{b} = 1 \quad (n \to \infty).$$

上式にて問題 17.11 の結果を用いた．こうして $0 < a < 1$ の場合が**底** a **の逆数をとることで** $a > 1$ **の場合に帰着された**のである.

例題 17.4 には他にも別解が考えられるが，一つはヒントをつけて演習問題に残しておく.

問題 17.12. 次の方法で例題 17.4 を解け：まず, $a > 1$ の場合, $a^n > 1$ より $a \leqq (a^n+1)^{\frac{1}{n}} \leqq 2^{\frac{1}{n}} a$ となることを用いる.

高校・高専の数学では数列の収束を定めるときに「限りなく」というあいまいな言葉を用いている．しかし，現代の数学では，実数の数列 $\{x_n\}$ が実定数 ξ に収束することは，次のように厳密に定義される（ ε-N **論法** という．詳しくは [13, p.5-6] を見よ).

> 任意の（どれだけ小さい）正実数 ε に対しても，ある（十分大きい）番号 N が存在して，$n \geqq N$ をみたすすべての番号 n について $|x_n - \xi| < \varepsilon$ が成立する.

極限値 $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ が存在することは認めた上で，例題 17.4 の $0<a<1$ の場合を ε-N 論法により再考しよう．a は正の実数だから，常に $(1+a^n)^{\frac{1}{n}} \geqq 1$. よって，答の極限値は 1 以上であるとして良い．では，**前記誤答のように答が 1 より大きくなる**ことはありうるだろうか.

仮に $\lim_{n\to\infty} a_n (=c) > 1$ であったとする．このとき，ε-N 論法により次のことが分かる：$n \geqq N$ ならば常に $a_n = (1+a^n)^{\frac{1}{n}} > (1+c)/2$ (⋯⑭) を満たすような自然数 N が存在している．$1 < (1+c)/2 < c$ に注意する．⑭ の両辺の逆数をとって両辺を n 乗すると,

$$\frac{1}{a^n+1} \leqq \left(\frac{2}{1+c}\right)^n. \quad \cdots ⑮$$

$0 < 2/(1+c) < 1$ かつ $0 < a < 1$ より $n \to \infty$ とすると⑮ の左辺は 1 に，右辺は 0 に収束するのでおかしい．したがって，$c = 1$ が示された．この説明で納得できない人は次の問題としてさらに熟考されたい．**納得したふりをして他人に承認されるよりも真に自分で納得すること**が大切である.

問題 17.13. ⑮ が成り立たなくなるような n の範囲を示し，⑭ が不合理であることを示せ.

試験の答案を採点する度に「検算さえしていれば・・・」と傷ましい思いに駆られる．他人の間違いを見つけて嬉しくなる人間など普通はいない．時間の問題などもあると思うが，**無理のない範囲で確認しながら問題を解く習慣を**身に付けてほしい.

問題の略解またはヒント

下記，ヒントはかっこ内に記した.

問題 1.1: 36.

問題 1.2: 6.4031（$6.4 < \sqrt{41} < 6.5$ を確認した上で $(6.5-\sqrt{41})^3 > 0$ と $(\sqrt{41}-6.4)^3 > 0$ を利用して $\boxed{\quad ? \quad} < \sqrt{41} < \boxed{\quad ? \quad}$ としてみよ）.

問題 2.1: 略.

問題 2.2: 略.

問題 2.3: $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$（与式 $= a^4+6a^2+9-4a^2$）.

問題 2.4: 商は $x^2-5x+25$, 余りは $-113x+47$.

問題 3.1: 略.

問題 3.2: 略.

問題 3.3: 略.

問題 3.4: (1) $a=2$, $M=2$, $N=4$. (2) 略（$\log_a M = x$, $\log_a N = y$ とおき，MN を a, x, y の式で表せ）.

問題 3.5: 略.

問題 3.6: 略.

問題 3.7: 略.

問題 4.1: 次の開平がポイント.

$$\sqrt{6-3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

問題 4.2: 2/7（点 A から対辺 BC へ垂線 AH を下ろし，$BH = x\ (0 < x < 8)$ として三平方の定理から線分 AH に関する方程式を立てよ）.

問題 4.3: (1) 略．(2) 略（(1) で示した式の右辺第二項の分母に相加相乗平均の関係を適用せよ）.

問題 4.4: (1) 略．(2) $x = \pm 1$ のとき最小値 12.

問題 4.5: $P = (3/4, 9/16)$ のとき最大値 $\pi/2$.

問題 5.1: 略.

問題 5.2: $0 \leqq x < 1-(1/\sqrt{2})$ または $1+(1/\sqrt{2}) < x \leqq 2$.

問題 5.3: $x = 1$ のとき最小値 1, $x = \sqrt{2}-2$ のとき最大値 $23-12\sqrt{2}$.

問題 5.4: 略（$t = -\log x$ とせよ．そのとき，$x = e^{-t}$ より $x \to 0+0 \Longleftrightarrow t \to \infty$ に注意）.

問題 5.5: $f(x) = e^x - x - 1$ の導関数 $f'(x)$ を求めて $f(x) \geqq f(0) = 0$ を証明すれば良い.

問題 5.6: $A \leqq B$. 等号は $a = b$ のときに成立する（$a = 3, b = 4$ として A, B の大小の見当をつけた上で，その仮の大小関係に基づく不等式を相加相乗平均の関係が使いやすい形へ同値変形する．ただし，解答は成立が確認された不等式から始めること）.

問題 5.6 の補足：問題 5.6 の A, B はそれぞれ **調和平均**, **二乗平均平方根** と呼ばれ，一般に，正の実数 a, b に対して次の関係が知られている（等号は $a = b$ のときにすべて成立）.

$$\frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

問題 5.7: $x = 1/\sqrt{2}$ のとき y は最大値 1/2 をとる.

問題 5.8: α が $\cos\alpha = 3/5$ かつ $0 < \alpha < \pi/2$ をみたすとすると，$x = \alpha$ のとき $f(x)$ は最大値 1/46 をとる（$t = \cos x$ とし，二倍角の公式を用いて $f(x)$ の分母を t の二次式にせよ）.

問題 5.9: $x = e^{-1}$ のとき $g(x)$ は最小値 $e^{-\frac{1}{e}}$ をとる（$\log g(x)$ を x で微分してみよ）.

問題 6.1: 略（例えば，xy 平面上で $A_1 = (0,0), A_2 = (1,0)$ として，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ が反時計回りに並び，かつこれらすべての点の y 座標が 0 以上になるように正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ を考える．このとき，$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,0)$, $\overrightarrow{A_2A_3} = (\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n))$, $\cdots$ $\overrightarrow{A_nA_1} = (\cos\{2(n-1)\pi/n\}, \sin\{2(n-1)\pi/n\})$.）

問題 6.2: ⑥ = ⑦ = 7/20, ⑧ = ⑨ = ⑩ = 13/20.

問題 6.3: 略.

問題 7.1: 商は $-9x+3$, 余りは 1.

問題 7.2: 略.

問題 7.3: 略.

問題 7.4: $(1/3)x^3 \log x - (1/9)x^3 + C$（$C$ は積分定数）.

問題 7.5: 略.

問題 7.6: 略.

問題 7.7: 略.（(1)〜(3) は左辺から，(4)〜(6) は右辺から定義に従って計算すると楽.）

問題 7.8: $\{c\sqrt{c^2-1} - \log(c + \sqrt{c^2-1})\}/2$

問題 8.1: $P = (1/2, 13/4)$ のとき最小値 $105/8$（題意の放物線の点 P での接線が直線 EG と平行になるときに三角形 EPG は面積が最大となる）.

問題 8.2: $f(x) = 2e^{-2}x + 1 - \log x - \log 2$ として $f'(x)$ を求めて，$x > 0$ で常に $f(x) \geqq 0$（等号は $x = e^2/2$ のとき成立）となることを示せばよい.

問題 8.3: (1) 略，(2) (1) より二点 $A(1,0)$, $B(e^2,2)$ に対して線分 AB は $s = \log t$ の下側にあることが分かる.

問題 8.4: 前半は略．後半の修正例は次の通り：

$$\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{2} + \left[e^{-2}x^2 - x\log x + x + (1-\log 2)x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}}.$$

問題 8.5: 題意の七面体を三平面 $x = 1/\sqrt{2}$, $x = -1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$ で四つに切ると，二つの合同な三角錐と二つの三角柱に分かれる.

問題 8.6: $0 \leqq a \leqq 1$ のとき $\sqrt{a} \geqq a$ に注意すると，

$$⑦ \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi - 1) < \frac{1.42}{8}\cdot 2.15 < 0.39.$$

問題 8.7: $(\sqrt{3}/6)\pi + (2\sqrt{3}/3) - (9/8)$

問題 8.8: $3\sqrt{3} - (4\pi/3)$

問題 9.1: 略（全事象相当の $6^3 = 216$ 本の枝をすべて描く必要はない．題意を満たす 10 本の枝を描けばよい）.

問題 9.2: ともに 4/27.

問題 9.3: (1) $(2^n - 2)/3^{n-1}$. (2) n 人中 2 人のみ勝ち組になる確率が $n(n-1)/(2\cdot 3^{n-1})$ でこれは確率なので 1 以下．よって，$n - 1/3^{n-1} \leqq 2/n$ が言える．これとはさみうちの原理から結果が従う.

問題 9.4: 1211/1296（得点の和が負になる確率が求め易くて 19/432 となる）.

問題 9.5: (1) 24 通り，(2) 1296 通り，(3) 15120 通り.

問題 10.1: ① 〜 ③ は 0, ④ と⑤ は -39 になる.

問題 10.2: ⑥ と ⑦ が 18, ⑧ と⑨ が 10 になる.

問題 10.3: 略.

問題 10.4: (1) 9 通り，(2) 25 通り，(3) 34 通り．((1) については 3 段目までの登り方，(2) については 4 段目までの登り方をそれぞれ樹形図を描いて考えればよい．）
問題 10.5: (1) 10 通り，(2) 15 通り．
問題 10.6: (1) 数学的帰納法によるが，$n = k$ ($k \geqq 1$) および $n = k+1$ のときを仮定して $n = k+2$ のときを証明することに注意せよ．(2) $n = 1$ のときは $a_2 = 2 = 1+1$ より明らか．$n \geqq 2$ のときは，例題 10.3 の誤答修正の際に用いた論法を応用して，n 段目と $n+1$ 段目を同時に登るか否かで場合分けする．$a_{2n} = a_{n-1}^2 + a_n^2$ が得られるはずである．
問題 10.7: 右辺から左辺を引けば $(ad - bc)^2 \geqq 0$. 等号は $ad = bc$ のとき成立.
問題 10.8: $(x,y) = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$ のとき最大値 $\sqrt{13}$, $(x,y) = (-2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$ のとき最小値 $-\sqrt{13}$.（問題 10.7 の結果を利用しても良いし，幾何的な方法によっても良い．）
問題 10.9: $(x,y) = (1,1)$ のとき最小値 -1.（$h(x,y) = x^3 + y^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot x \cdot y - 1 = (x+y+1)\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2\}/2 - 1$ と変形される．）
問題 10.10: $(u,v) = (4/5, 4/5)$ のとき z は最小値 $-24/25$ をとる．
問題 10.11: 略．(㉓ から $4/5 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ かつ $4/5 \leqq \cos\beta \leqq 1$ の場合か，または $-1 \leqq \sin\alpha \leqq -4/5$ かつ $-1 \leqq \cos\beta \leqq -4/5$ の場合が得られる．それぞれの場合に $\sin 2\alpha$ の最大値と最小値を求め，そのときの (α,β) が題意を満たすか確認すればよい．）
問題 11.1: ⑮ を見れば ${}_2\mathrm{C}_2/{}_6\mathrm{C}_2 = 1/15$ が明らか.
問題 11.2: (1) 赤玉 2 個と白玉 $n-1$ 個 ($n \geqq 1$) の入った袋を考えよ．例題 11.1 と同様に赤玉初出の回で分けると題意の式が得られよう．(2) では赤玉 3 個と白玉 $n-1$ 個が入った袋を考えればよい．(3) は (1) と (2) の結果を組み合わせればよい.
問題 11.3: 略（枝の総数は 18 本になる）.
問題 11.4: $N = 99a + 9b + (a+b+c) = 3(33a+3b) + (a+b+c)$ に注意せよ.
問題 11.5: (1) $N - (a+b+c) = 99a + 9b = 9(11a+b)$ より明らか．(2) (1) から a, b, c の順によらず Y の値が決まることに注意すると，たかだか ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りの場合に対する Y の値を考えれば良いことになる．答は 18/5.
問題 11.6: 32/63.
問題 11.7: (1) は誤答部分の表を参照．(2) はたかだか 9 通り分の表を書けばよい.
問題 11.8: (1) 等比級数公式の証明を模して $P_N - (1/3)P_N$ を計算すれば次の式が得られよう．

$$P_N = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^N - \frac{1}{2} \cdot \frac{2N-1}{3^N}$$

(2) $3^N = (1+2)^N$ として二項展開すると $3^N \geqq 2N^2 - 2N$ ($N \geqq 2$) が得られる．(3) 略.
問題 12.1: 略.
問題 12.2: (1) 平行線の性質から $OM : MA = OQ : QN = 2 : 1$. $ON : NB = 3 : 1$ より $QN : NB (= MP : PB) = 3 \cdot (1/3)NB : NB = 1 : 1$ (2) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (2/3)\vec{a} + (1/2)\overrightarrow{MB} =$

$(1/3)\vec{a}+(1/2)\vec{b}$.

問題 12.3: 〈解 1〉例題 12.2 の誤答の方法にならうと, 今度は $|\vec{l}|=|\vec{m}|=|\vec{n}|=\sqrt{2}, \vec{l}\cdot\vec{m}=\vec{m}\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\vec{l}=1$ なので, $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=2\{a-(13/24)\}^2+(23/288)>0$ 〈解 2〉 $\vec{l}=(1,1,0), \vec{m}=(0,1,1), \vec{n}=(1,0,1)$ として PQ を直径とした球の方程式を求め, 点 R が a の値に関係なくその外にあることを示す. 〈解 3〉〈解 2〉と同じ位置ベクトルを定めて a の値に関わらず常に $PR^2+QR^2-PQ^2>0$ であることを示す (余弦定理の応用).

問題 12.4: 二三角形 ABH, BMC が相似な直角三角形であることを利用すると良い.

問題 12.5: 問題 12.4 の結果によれば $\overrightarrow{DH}=(4/5,-3/5)$ だが, 誤答によれば $\overrightarrow{DH}=(6/5)\vec{b}-(7/5)\vec{d}=(6/5,-7/5)$ となり両立しない.

問題 12.6: 〈解 1〉 題意の四直線上に点 O と重ならないようにそれぞれ P, Q, R, D をでたらめにとる. このとき, $\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OP}+q\overrightarrow{OQ}+r\overrightarrow{OR}$ が成立. $pqr\neq 0$ に注意して, $\overrightarrow{OA}=p\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}=q\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OC}=-r\overrightarrow{OR}$ とすると, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\iff\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$ より題意成立. 〈解 2〉 題意の四直線のうち三つに点 O と重ならないようにそれぞれ $P(1,0,0)$, $Q(p,1,0)$, $R(q,r,1)$ を適当にとる. このとき, 残り一本の直線上の点 D の座標は (x,y,z) $(xyz\neq 0)$ により与えられるが, $\overrightarrow{OA}=(x-py+prz-qz,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(p(y-rz),y-rz,0)$, $\overrightarrow{OC}=(-qz,-rz,-z)$ と定めれば $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ より題意成立.

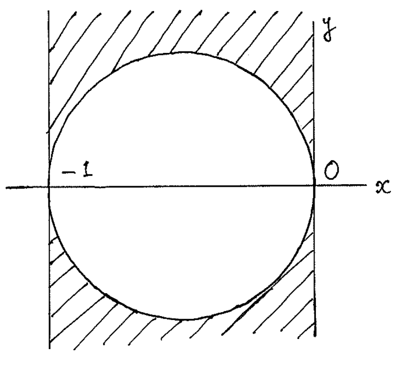
問題 13.1: (1) 略. (2) 外分点の座標は $(10,0)$. (3) 例えば, $P=(7,3)$.

問題 13.2: 最初の等式については $w=w_1+w_2i$ (w_1, w_2 は実数でかつ $i=\sqrt{-1}$) として左辺と右辺が両方とも $w_1^2+w_2^2$ となることを確認する. 他の等式は $u=u_1+u_2i$, $v=v_1+v_2i$ (u_1, u_2, v_1, v_2 は実数) とすれば容易.

問題 13.3: (1) 点 A を通って直線 BP に平行な直線と直線 CP の交点を E とする. 平行線の性質から二三角形 AEC と BPC の相似性が言える. これより $AE=(AC/BC)\cdot BP=3BP=AP$. (2) は (1) を参考にせよ. (3) $\angle CPD=\angle CPB+\angle DPB=\angle APQ/2=90°$.

問題 13.4: 略.

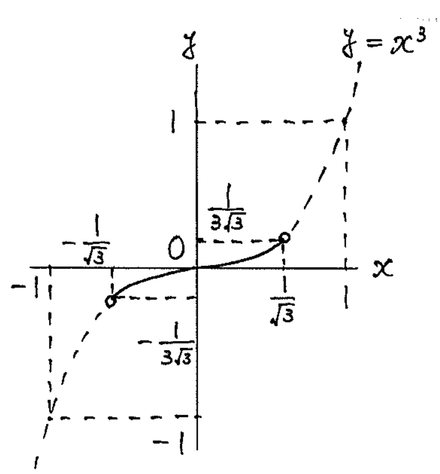
問題 13.5: 例題 13.3 の解法に倣えば良い. 答は下図斜線部分 (境界を除く).



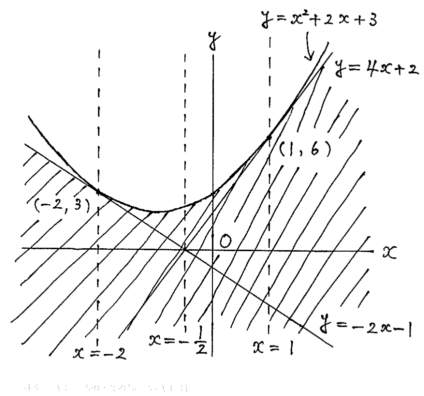
問題 13.6: $P=(t,t^3)$ とおくと，L の方程式は $y=\{(1+3t^2)/(1-3t^2)\}(x-t)+t^3$ となる．これと C の方程式を連立して整理すると，

$$(x-t)\left(x^2+tx+t^2-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}\right)=0.$$

上式左辺の第二因子が $x=t$ 以外で相異なる二実根を持てばよい．答は次の実線部分の通り（中抜きの点を除く）．



問題 13.7: (1) $y \leqq -2x-1$. (2) $y \leqq x^2+2x+3$. (3) $y \leqq 4x+2$. (4) 下図斜線部分の通り（境界を含む）．



問題 14.1: (1) 線分 OA と円 O の交点を P とする．円 O の周上に直線 OA 外の点 P' をとる．点 P' が直線 OA 上にあるときは明らかなので，そうでない場合を考えれば良い．このとき，三角形の成立条件から

$$AO(=AP+PO)<AP'+P'O(=AP'+PO) \Leftrightarrow AP<AP'.$$

(2) 点 A から直線 l に下ろした垂線の足を H とすると，$P=H$ でない限り，三角形 APH は直角三角形なので $AP=\sqrt{AH^2+HP^2}>AH$.

問題 14.2: 三平方の定理を用いよ．

問題 14.3: 略.

問題 14.4: $f(p) = p^4 + p^2 - 6p + 9$ とおいて $f'(p)$ の符号を調べても良いし，因数分解によって $f(p) - 5 = (p-1)^2\{(p+1)^2 + 3\} \geqq 0$（等号成立条件は $p = 1$ のとき）としても良い．

問題 14.5: x を消去して y の二次方程式にすると解きやすい.

問題 14.6: $p = \pm\sqrt{15}$ のとき，点 P での接線の傾きは $\pm\sqrt{15}/4$, 直線 AP の傾きは $\mp 4/\sqrt{15}$（複号同順）.

問題 14.7: 略.

問題 14.8: $f'(t) = 2\{t - x_0 + (a/b^2)(at + by_0 + c)\}$.

問題 14.9: 題意の t の値のとき，$t - x_0 = -\{a/(a^2+b^2)\}(ax_0 + by_0 + c)$, $-(a/b)t - (c/b) - y_0 = -\{b/(a^2+b^2)\}(ax_0 + by_0 + c)$ である．

問題 14.10: ⑨〜⑪からは $2t^2 - 16t + 34$, ⑫〜⑮からは $2t^2 - 8t + 10$ が得られる．

問題 14.11: (1) 楕円 E の方程式から $p = q = 0$ にはならないので，行基本変形から $\mathrm{rank} G = 2$ が言える．(2) $\mathrm{grad} f = \lambda \mathrm{grad} g_1 + \mu \mathrm{grad} g_2$ を満たす (p, q, r, s) の組から題意に適するものを選べば良い．この関係式から $p = 3q$ が言える．これと E の方程式から p, q の値が分かり，次に直線 l の方程式と併せて μ の値が，続いて r, s の値も分かる．結果は略.

問題 15.1: $a_{100} = (3\sqrt{11} - 20)/10 = -1.0050\cdots$ であり，正答の -1 と小数第二位まで一致している．

問題 15.2: (1) 3/5, (2) $\log 2$, (3) 3, (4) 1/2.

問題 15.3: 右辺を通分したものから左辺を引いて因数分解すれば $(x^2 + x + 1)/\{x^2(x+1)\}$ が得られる．

問題 15.4: 略.

問題 15.5: (1) -11, (2) 2.

問題 15.6: (1) π, (2) $\pi/\sqrt{a}$.

問題 15.7: 略.

問題 15.8: $p_{20} \doteqdot 0.0031$, $(2/e)^{20} \doteqdot 0.0022$.

問題 15.9: $f(x) = 24e^x - x^4 - 1$ とすると，$f'(x) = 24e^x - 4x^3$, $f''(x) = 24e^x - 12x^2$, $f'''(x) = 24e^x - 24x$, $f^{(4)}(x) = 24e^x - 24$ となることを利用する．

問題 15.10: すべて 1/2 となる．

問題 15.11: すべて $(2 + \sqrt{2})/2$ となる．

問題 15.12: 略.

問題 15.13: 左辺は $(2 + \sqrt{2})/2$, 右辺は $-(7 + 2\sqrt{2})/2$.

問題 15.14: 略.

問題 15.15: 略.

問題 16.1: 初項は 27, 公差は 49, 一般項は $a_n = 49n - 22$.

問題 16.2: 初項は 3, 公比は -2.

問題 16.3: 略.

問題 16.4: (1) (3) は略．(2) は次の式が成り立つことに注意せよ：

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a_n + 8c_n & -5b_n + 8d_n \\ -3a_n + 5c_n & -3b_n + 5d_n \end{pmatrix}.$$

問題 16.5:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと，左辺と右辺はともに

$$\begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 & b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}$$

となる．

問題 16.6: 余因子行列を用いた方法（高校でいう「逆行列の公式」）によっても良いし，行の基本変形を用いた方法もある：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{①}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{②}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ただし，①では第 1 行から第 2 行を引き，②では第 2 行から第 1 行の 2 倍を引いた.

問題 16.7: 略.

問題 16.8: 略.

問題 16.9: 〈解 1〉結果が分かっているので，数学的帰納法を用いる．〈解 2〉等比級数公式の証明に用いる方法を真似して，

$$\begin{array}{rrcccccc} & 2S_n & = & 1 & +\dfrac{2}{2} & +\cdots & +\dfrac{n}{2^{n-1}} & \\ -) & S_n & = & & \dfrac{1}{2} & +\cdots & +\dfrac{n-1}{2^{n-1}} & +\dfrac{n}{2^n} \\ \hline & S_n & = & 1 & +\dfrac{1}{2} & +\cdots & +\dfrac{1}{2^{n-1}} & -\dfrac{n}{2^n} \end{array}$$

から計算しても良い．〈解 3〉次の関数 $f(x)$ $(0 < x < 1)$ を微分した式を利用する：

$$f(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

問題 16.10: 略.

問題 16.11: (1) $-1/2$ または 1. (2) 固有値 $-1/2$ に対しては

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は実数}).$$

固有値 1 に対しては

$$u\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad （u は実数）.$$

(3) 行列 P を

$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3\end{pmatrix}$$

と定めると,

$$AP=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{q}_1 & A\boldsymbol{q}_2 & A\boldsymbol{q}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_1 & -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=P\Lambda.$$

ただし,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

とした．P は正則で

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

となり $A=P\Lambda P^{-1}$.

(4) $A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^n P^{-1}$ から

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\end{pmatrix}$$

(5) $\boldsymbol{p}_n=A\boldsymbol{p}_{n-1}=\cdots=A^n\boldsymbol{p}_0$ より

$$p_n=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3},\quad q_n=r_n=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}.$$

問題 16.12: $p_n=\{1/(k+1)\}\{1-(-1/k)^n\}$.

問題 17.1: ⓪ ≒ 0.19, ① = ② = ③ ≒ 1.1.

問題 17.2: 略.

問題 17.3: 左辺は

$$\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix}p^2-qr & -q(p-s)\\ r(p-s) & -qr+s^2\end{pmatrix}$$

である.

問題 17.4: 略.

問題 17.5: 略.

問題 17.6:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{①}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{②}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & a^2+1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$
$$\overset{③}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a^2+1} & -\frac{a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$
$$\overset{④}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+1} & \frac{1}{a^2+1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a^2+1} & -\frac{a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

ただし，① では第 1 行と第 2 行を交換し，② では第 2 行から第 1 行の a 倍を引き，③ では第 2 行を $1/(a^2+1)$ 倍し，④ では第 1 行に第 2 行の a 倍を加えた.

問題 17.7: A^2 を計算すれば見通しがつきやすい．答は

$$A^n = (a^2+1)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} (n \text{ は奇数}), \quad (a^2+1)^{\frac{n}{2}} E_2 (n \text{ は偶数}).$$

問題 17.8: 略.

問題 17.9: 略.

問題 17.10: 右辺を展開して整理せよ.

問題 17.11: 従来の 2 を a に置き換えればよい.

問題 17.12: 略.

問題 17.13: $1/(a^n+1) \geqq 2/3 \Leftrightarrow n \geqq -\log_a 2$ をみたす最小の自然数 n を N' とし，$\{2/(1+c)\}^n \leqq 1/3 \Leftrightarrow n \geqq \log 3/\{\log(1+c) - \log 2\}$ をみたす最小の自然数 n を N'' とする．さらに，N''' を N, N', N'' のうちの最大値とすると，$n \geqq N'''$ ならば常に

$$\frac{2}{3} \leqq \frac{1}{a^n+1} \leqq \left(\frac{2}{1+c}\right)^n \leqq \frac{1}{3}$$

が成立することになる．よって，⑭ は不合理である.

参考文献

[1] 田代嘉宏，新編高専の数学 1 問題集，第 2 版，森北出版，2000.

[2] 田代嘉宏，新編高専の数学 2 問題集，第 2 版，森北出版，2001.

[3] 田代嘉宏，新編高専の数学 3 問題集，第 2 版，森北出版，2001.

[4] 高遠節夫ほか，新基礎数学，大日本図書，2011.

[5] 高遠節夫ほか，新微分積分 I，大日本図書，2012.

[6] 受験の月，⟨http://examist.jp/mathematics/⟩.

[7] 外林康治，大学入試数学電子図書館，⟨http://www.densu.jp/⟩.

[8] マスオ，高校数学の美しい物語，⟨http://www.mathtrain.jp/⟩.
[9] 広松芳紀，大学入試問題集成，⟨http://mathexamtest.web.fc2.com/index.html⟩.
[10] 森田康夫，代数概論，裳華房，1987.
[11] G. ポリア（著），柿内賢信（訳），いかにして問題をとくか，丸善，1954.
[12] 東京大学数学入試問題 50 年，聖文新社.
[13] 吹田信之，新保経彦，理工系の微分積分学，学術図書出版社，2003.
[14] 谷口美喜夫, 大学入試数学の問題, ⟨http://www.geocities.jp/mikiotaniguchi/math/index.html ⟩.
[15] 旺文社，全国大学入試問題正解.

[11] は数学研究者の間ではよく知られた名著であり，拙著も大きな影響を受けている．是非一読されたい.